

## S E M I N A R A R B E I T

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Astrophysik

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

### **Grundaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie und Berechnung der relativistischen Periheldrehung**

Verfasserin:  
Miriam Ströse

Kursleiter:  
OStR Herr Koch

Abgabetermin:

07.11.2023

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
				Summe:	
Gesamtleistung (max. 30 Punkte) nach § 61 (7) GSO = Summe:2 (gerundet)					

---

Datum und Unterschrift des Kursleiters

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bedeutung der allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Begriffe und Kernaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>3</b>
2.1	Krümmung der Raumzeit . . . . .	3
2.2	Gravitation . . . . .	4
2.2.1	Der Newtonsche Gravitationsbegriff . . . . .	4
2.2.2	Neue Definition der Gravitation durch Einstein . . . . .	5
2.3	Lichtablenkung im Gravitationsfeld . . . . .	5
2.4	Äquivalenzprinzip als geometrische Beschreibung der Gravitation . . . . .	8
2.5	Erklärung der Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .	10
2.6	Zeitdilatation in einem beschleunigten System . . . . .	12
2.6.1	Erläuterung der gravitativen Zeitdilatation . . . . .	12
2.6.2	Bedeutung für GPS-Systeme . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Periheldrehung</b>	<b>14</b>
3.1	Erklärung der Periheldrehung . . . . .	14
3.2	Berechnung der relativistischen Periheldrehung des Merkur . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Rückblick und neue Horizonte der Forschung</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Literatur</b>	<b>28</b>
<b>8</b>	<b>Quellen</b>	<b>29</b>
<b>9</b>	<b>Erklärung zur Seminararbeit</b>	<b>30</b>

# 1 Bedeutung der allgemeinen Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie wurde zwischen 1907 und 1916 von Albert Einstein entwickelt und hat das Verständnis der Gravitation revolutioniert. Die Aussagen über Raum und Zeit, die Einstein bereits in seiner speziellen Relativitätstheorie für gleichförmig bewegte Bezugssysteme herausgearbeitet hat, erweitert er darin auf beschleunigte Bezugssysteme. Mit dieser Theorie hat Einstein astronomische Ereignisse vorhergesagt, die für das Verständnis unseres Universums von großer Bedeutung sind. Dazu gehören faszinierende Phänomene wie Gravitationswellen und schwarze Löcher [Spektrum, Gravitationswellen 1998].

Außerdem gibt es mehrere kosmologische Modelle, die auf der allgemeinen Relativitätstheorie basieren und uns Aussagen über den Urknall und die Expansion des Universums ermöglichen. Des Weiteren hat diese Theorie das Mysterium der Periheldrehung des Merkur aufgeklärt, deren exakte Berechnung erst die Erkenntnisse der allgemeinen Relativitätstheorie zulassen. Auch für unserer Alltagswelt ist die allgemeine Relativitätstheorie von großer Relevanz. Denn ohne Einsteins Erkenntnisse wären unsere heutigen GPS-Systeme unbrauchbar aufgrund der zu hohen Ungenauigkeit, die klassische Berechnungen ohne Berücksichtigung relativistischer Effekte enthalten würden.

In der Seminararbeit werden Grundaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie, häufig mithilfe von Gedankenexperimenten, erläutert. Darauf folgt die Berechnung der relativistischen Periheldrehung. Durch die Ausarbeitung vieler Zwischenschritte ist die Berechnung mit Oberstufenwissen verständlich. Eine Ausnahme bildet die mehrfach angewandte Taylor-Entwicklung, die im Anhang erläutert wird. Diese Arbeit liefert auf verständliche Art und Weise Einblicke in die Verbindung zwischen Raum, Zeit und Gravitation – eine Verbindung, die unsere Sicht auf das Universum grundlegend verändert hat, weiterhin unser Verständnis von den fundamentalen Gesetzen der Natur erweitert sowie für die aktuelle astronomische Forschung von großer Bedeutung ist.

## 2 Begriffe und Kernaussagen der allgemeinen Relativitätstheorie

### 2.1 Krümmung der Raumzeit

Die Raumzeit ist bereits aus der speziellen Relativitätstheorie bekannt. Raum und Zeit sind nicht mehr unabhängig voneinander, sondern bilden ein Raumzeit-Kontinuum. Aus dem dreidimensionalen Raum und der eindimensionalen Zeit bildet sich die vierdimensionale Raumzeit. Diese ist flach, wenn keine Materie und Energie vorhanden sind [Fischer 2016, S.60].

Bei der allgemeinen Relativitätstheorie kommt nun hinzu, dass die Raumzeit in Anwesenheit von Masse oder Energie gekrümmt ist. Je größer die Masse oder die Energie-

menge ist, desto stärker ist die Raumzeit-Krümmung. Somit ist sie beispielsweise bei einem schwarzen Loch besonders ausgeprägt.

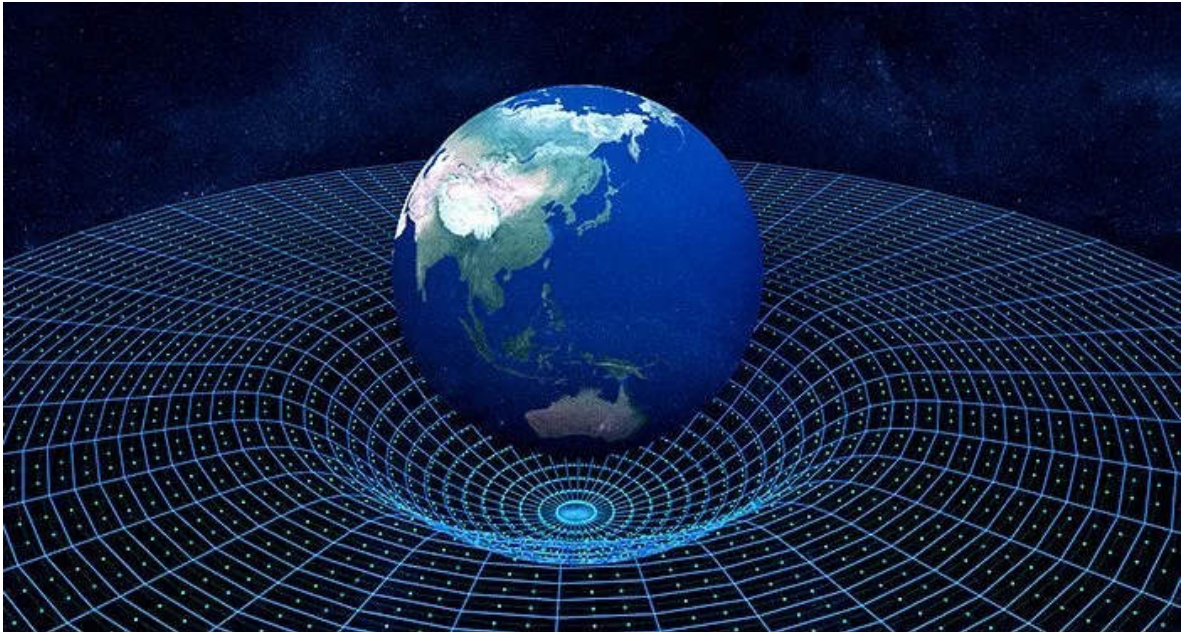


Abbildung 1: Raumzeit-Krümmung der Erde [scinnexx-Wissensmagazin 2019].

Wie Abbildung 1 zeigt, kann man sich die Raumzeit auch vereinfacht wie ein zweidimensionales Gitter vorstellen, das in Anwesenheit von Energie oder Masse, in diesem Beispiel der Erde, nach unten gedrückt, also gekrümmt wird.

Die Geometrie in der gekrümmten Raumzeit unterscheidet sich von der Geometrie auf euklidischen, also ebenen Flächen. Der flache Raum ist so definiert, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten immer eine Gerade ist. In der gekrümmten Raumzeit ist die kürzeste Verbindung im Allgemeinen eine gekrümmte Linie. Daraus resultiert, dass die Winkelsumme eines Dreiecks in der Raumzeit-Krümmung nicht mehr 180 Grad beträgt, sondern immer darüber oder darunter liegt. Ein anderes Beispiel ist, dass sich auf einer ebenen Fläche zwei parallele Geraden niemals schneiden. Auf einer gekrümmten Oberfläche jedoch können sich zwei Geraden, die zunächst parallel laufen, schneiden. Allein anhand dieser Beispiele wird deutlich, dass in der gekrümmten Raumzeit neue Regeln gelten [Gaßner und J. Müller 2022, S. 226-231], [Spektrum, Raumzeit 2014].

## 2.2 Gravitation

### 2.2.1 Der Newtonsche Gravitationsbegriff

Newton beschreibt in seinem Gravitationsgesetz, dass alle Körper, die eine Masse besitzen, eine anziehende Gravitationskraft auf alle Körper ausüben, die ebenfalls eine Masse besitzen. Dabei übt der Körper, auf den eine Kraft ausgeübt wird, laut dem Wechselwirkungsgesetz eine entgegengesetzt orientierte, betragsmäßig gleich große Kraft auf

den anderen Körper aus. Diese Anziehungskraft ist abhängig von den Massen und dem Abstand beider Körper. Sie lässt sich mit der Formel

$$F_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

berechnen. Dabei ist  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$  die Gravitationskonstante,  $m_1$  und  $m_2$  die Massen der Körper, die eine gegenseitige Gravitationskraft  $F_G$  aufeinander ausüben, und  $r$  der Abstand der beiden Massenmittelpunkte [Leifi Physik 2019].

### 2.2.2 Neue Definition der Gravitation durch Einstein

Newton hat die Gravitation also als Kraft betrachtet. Einstein hingegen bezeichnet die Gravitation als geometrische Eigenschaft. Wie bereits im Obigen dargestellt, ist die Raumzeit in Anwesenheit einer Masse bzw. Energie gekrümmt. „In dieser gekrümmten Raumzeit gibt es keine Raumzeitgeraden mehr, ebenso wenig wie es auf der Oberfläche einer Kugel Geraden gibt. Es gibt lediglich Geodäten, geradestmögliche Raumzeitgeraden“ [Einstein Online, Gravitation 2010].

Befindet sich nun ein Objekt in der Nähe einer Zentralmasse, dann bewegt es sich auf den geradestmöglichen Bahnen in der Raumzeit, die durch die Masse gekrümmt ist. Nähert sich beispielsweise eine Masse der Erde an, bewegt sich das Objekt im Raum nach dieser Krümmung, da dies die geradestmögliche Bahn ist. Auf diesen Bahnen bewegen sich zum Beispiel die Planeten in unserem Sonnensystem. Die Gravitation ist laut Einstein also keine Kraft, sondern das Resultat der Krümmung der Raumzeit.

Dieses Phänomen kann man sich auch mit einem Fußball vorstellen, der auf eine in der Luft gehaltene Decke gelegt wird, wodurch eine Delle entsteht. Wird nun ein Tennisball auf ein Ende der Decke gelegt, rollt er zum Fußball, da er der Krümmung folgt. Hätte der Tennisball eine bestimmte Anfangsposition und eine bestimmte Geschwindigkeit tangential zum Fußball, würde er sich auf einer Ellipsenbahn um den Fußball bewegen, analog zu einem Planeten und der Sonne [ebd.].

## 2.3 Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Newton hat zu Beginn des 18. Jahrhunderts in seiner Gravitationstheorie behauptet, dass Gravitation denselben Einfluss auf Lichtteilchen hat wie auf Materie. Der Astronom Johann Georg von Soldner berechnete ein Jahrhundert später die Lichtablenkung anhand der Lichtstrahlen eines weitentfernten Sterns, welche die Raumzeit-Krümmung der Sonne durchlaufen. Der berechnete Wert, der auf der Newtonschen Mechanik basiert, lag bei 0,9 Bogensekunden. Dieses Ergebnis wurde damals aufgrund mangelnder technischer Möglichkeiten nicht weiter überprüft.

Anfang des 20. Jahrhunderts hat Einstein vorhergesagt, dass Licht am Sonnenrand um das Doppelte des Newtonschen Wertes abgelenkt wird. Einsteins Behauptungen

wurden anhand weiterer Berechnungen und vieler Experimente schließlich bestätigt.

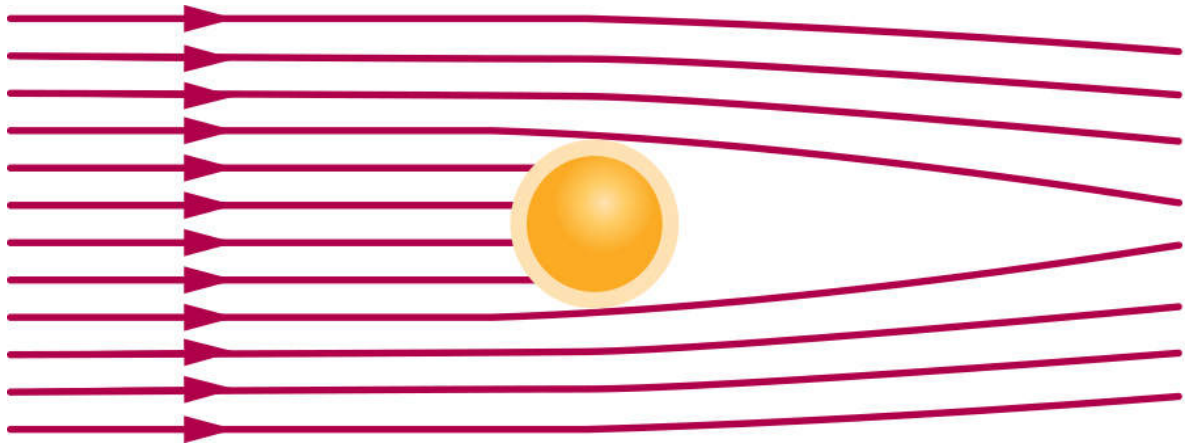


Abbildung 2: Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne [Einstein Online, Verborgene Lichtstrahlen 2010]

Die Lichtablenkung basiert auf den Aussagen, die in den vorherigen Kapiteln dargestellt wurden. Wenn ein Lichtstrahl die Raumzeitdelle eines massereichen Objekts durchquert, wird er um einen bestimmten Winkel  $\alpha$  abgelenkt. Je näher das Licht dem Körper kommt, desto stärker ist die Ablenkung. In Abbildung 2 durchlaufen Lichtstrahlen die gekrümmte Raumzeit der Sonne, wodurch ein Teil dieser abgelenkt wird. Die Lichtstrahlen, die sich unmittelbar am Sonnenrand befinden, werden stärker abgelenkt als die, die weiter von der Sonne entfernt sind. Der Grund dafür ist, dass die Raumzeit in der Nähe des Objekts stärker gekrümmt ist als weiter weg.

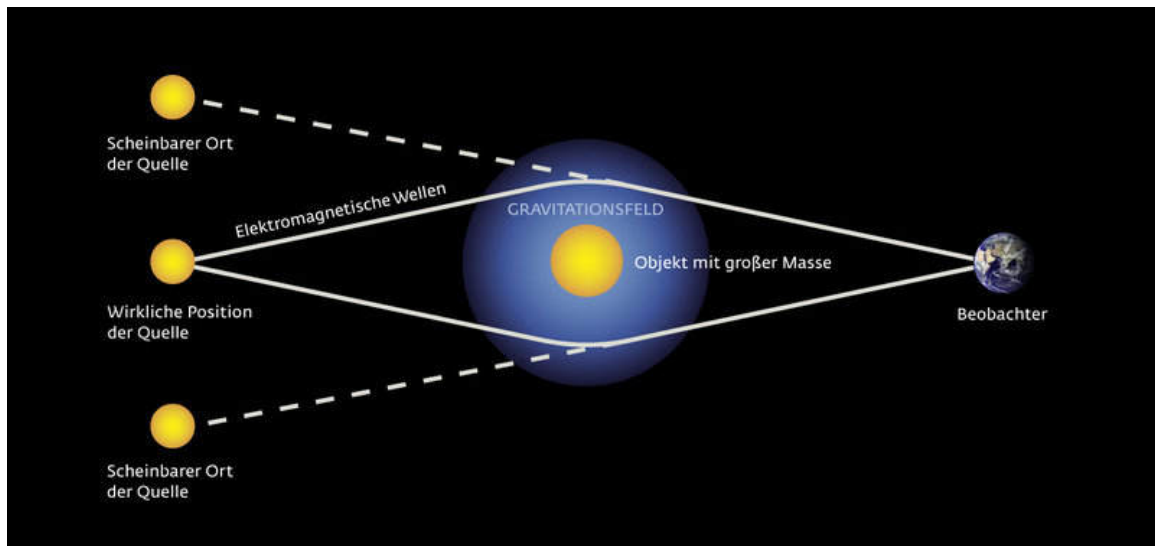


Abbildung 3: Gravitationslinseneffekt [DLR 2011]

Eine wichtige Anwendung der Lichtablenkung im Gravitationsfeld ist der Gravitationslinseneffekt, der in Abbildung 3 dargestellt ist. Darauf ist eine Lichtquelle, beispielsweise ein Stern, zu sehen, dessen Lichtstrahlen das Gravitationsfeld eines schweren Objekts, beispielsweise das der Sonne, durchlaufen. Nur aufgrund der Lichtablenkung

sieht der Beobachter auf der Erde die Lichtstrahlen des Sterns. Vor der Entdeckung der allgemeinen Relativitätstheorie hat man gedacht, dass die Lichtstrahlen von Sternen stammen, die in der Abbildung als „scheinbarer Ort der Quelle“ dargestellt sind. Durch Einsteins Theorie wurde allerdings deutlich, dass die Lichtstrahlen nur von einem einzigen Stern stammen, der sich hinter dem Objekt befindet [Einstein Online, Lichtablenkung durch Gravitation 2010].

Dieser Effekt kann beispielsweise dazu genutzt werden, schwarze Löcher nachzuweisen. Bei einem schwarzen Loch ist die Masse so stark komprimiert, dass sich nichts ihrer enorm großen Gravitationskraft entziehen kann. Somit kann jedes Licht, das in ein schwarzes Loch trifft, ihm nicht mehr entkommen, weshalb hinter dem schwarzen Loch, also bei dem Beobachter, kein Licht sichtbar sein sollte. Der Grund, dass Lichtstrahlen sichtbar sind, ist, dass das schwarze Loch die Raumzeit krümmt, das Licht dieser Krümmung folgt und somit Lichtstrahlen bei dem Beobachter ankommen. Dieses Erkenntnis ermöglichte die Entdeckung schwarzer Löcher [RND 2021].

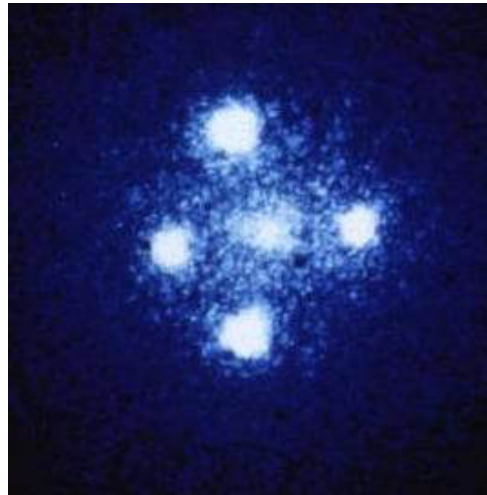


Abbildung 4: Einstein-Kreuz, verursacht durch den Gravitationslinseneffekt [Einstein Online, Verbogene Lichtstrahlen 2010]

Wenn das Licht einer Hintergrundquelle durch ein massereiches Objekt abgelenkt wird, kann der Beobachter auf der Erde ein Einstein-Kreuz wie in Abbildung 4 sehen, bei dem das Licht der Hintergrundquelle in mehreren Bildern um das massereiche Objekt herum angeordnet wird. Es handelt sich also nicht um ein Bild mit vier verschiedenen Sternen, sondern um das Bild von ein und demselben Stern [Einstein Online, Verbogene Lichtstrahlen 2010].

Wenn die Hintergrundquelle, das massereiche Objekt und der Beobachter ideale Ausrichtung und Gestalt besitzen, kann man statt dem Einstein-Kreuz einen Einstein-Ring wie in Abbildung 5 beobachten. Gibt es auch nur geringe Abweichungen der perfekten Ausrichtung, erscheint der Einstein-Ring unvollständig [Spektrum, Einstein-Ring 2014].

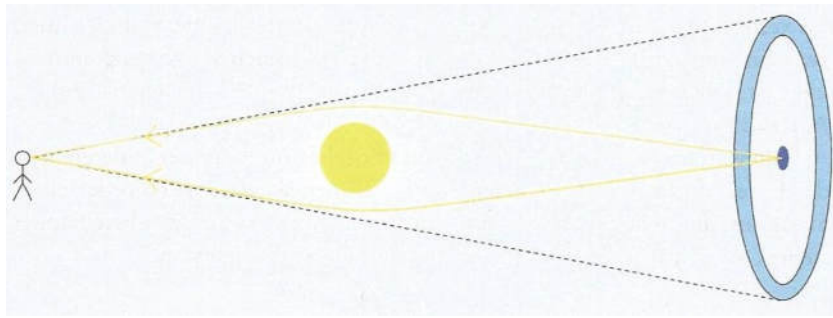


Abbildung 5: Einstein-Ring, verursacht durch den Gravitationslinseneffekt [Fischer 2016, S. 80]

## 2.4 Äquivalenzprinzip als geometrische Beschreibung der Gravitation

Um ein weiteres zentrales Prinzip der allgemeinen Relativitätstheorie zu verstehen, wird folgendes Gedankenexperiment durchgeführt:

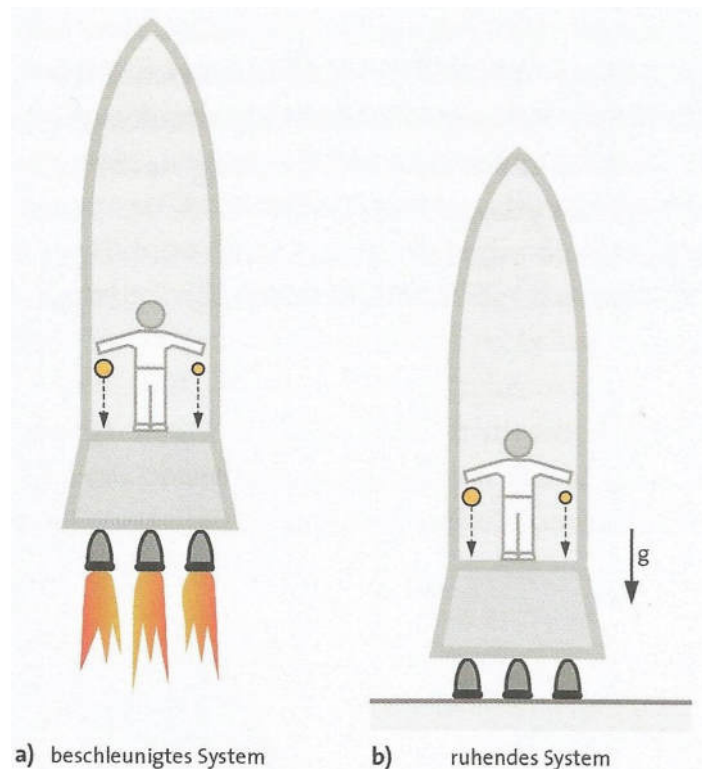


Abbildung 6: Äquivalenzprinzip [Gaßner und J. Müller 2022, S. 221]

In Abbildung 6 ist auf dem linken Bild eine Rakete dargestellt, die sich in einem gravitationsfreien Raum befindet und mit  $a = 9,81 \frac{m}{s^2}$  senkrecht nach oben beschleunigt. Die Person in der Rakete lässt zwei Bälle fallen, die die gleiche Masse haben und somit gleichzeitig auf den Boden fallen, da der Raketenboden auf die Bälle zu beschleunigt. In dem rechten Bild befindet sich eine Person in einer ruhenden Rakete im Gravitationsfeld der Erde und lässt ebenfalls zwei gleich schwere Bälle fallen, die wiederum kurz darauf zu Boden fallen. Man kann rein aus der Beobachtung der zum Raketenboden



beschleunigten Bälle nicht unterscheiden, ob man sich in der nach oben beschleunigten oder in der ruhenden Rakete befindet, da in beiden Fällen die Bälle zur gleichen Zeit auf dem Boden landen. Somit sind die beiden Szenarien einander äquivalent. Das Äquivalenzprinzip besagt also, dass man zwischen Gravitation und Beschleunigung nicht unterscheiden kann.

Nun stellt man sich vor, dass man sich in einem Aufzug befindet und der Ball und man selbst schwerelos ist. Allein anhand dieser Information kann man nicht entscheiden, ob man sich in einem Gravitationsfeld befindet oder nicht. Denn es könnte sein, dass der Aufzug im Gravitationsfeld der Erde mit Erdbeschleunigung nach unten beschleunigt, sich also im freien Fall befindet. Somit fühlt man sich schwerelos, man spürt demnach keine Schwerkraft mehr, obwohl man sich in einem Gravitationsfeld befindet. „Mit keinem Experiment, anhand keines physikalischen Gesetzes, so postulierte er [Einstein], kann man feststellen, ob man sich beispielsweise im gravitationsfreien Raum oder in einer fallenden Kabine im Schwerfeld befindet“ [Einstein Online, Äquivalenzprinzip 2011]. Die Trägheitskraft in einem beschleunigten Bezugssystem ist also äquivalent zur Schwerkraft in einem Gravitationspotential [Gaßner und J. Müller 2022, S. 220-221], [Bartelmann und A. Müller 2022, S. 36-37], [Einstein Online, Äquivalenzprinzip 2011]. Aus dieser Erkenntnis ergibt sich das starke oder auch das sogenannte Einstein'sche Äquivalenzprinzip, das wie folgt lautet: „In jedem frei fallenden Bezugssystem gelten dieselben physikalischen Gesetze, wie sie auch in der gravitationsfreien Physik gelten [...]“ [ebd.].

Das schwache Äquivalenzprinzip hingegen besagt, dass zwei Körper am gleichen Ort unabhängig von deren Masse gleich schnell zu Boden fallen, vorausgesetzt, jegliche Reibungskräfte werden vernachlässigt. Der Grund hierfür ist, dass die träge Masse und die schwere Masse für jede Materie exakt übereinstimmen. Die schwere Masse ist die Masse, die wir im alltäglichen Leben als Gewicht bezeichnen. Sie ist dafür verantwortlich, dass ein Körper beschleunigt zu Boden fällt. Die träge Masse hingegen widersetzt sich dieser Bewegung [Fischer 2016, S. 53-55], [Einstein Online, Äquivalenzprinzip 2011].

Bisher wurde das Äquivalenzprinzip vereinfacht dargestellt. Denn Gravitation und Beschleunigung sind nur in einem homogenen Gravitationsfeld zwei äquivalente Größen. Dort werden Körper tatsächlich gleich stark und in die gleiche Richtung beschleunigt. In der Realität sind jedoch alle Gravitationsfelder inhomogen. In Abbildung 7 befindet sich eine Rakete in einem Gravitationsfeld. Die Person in der Rakete lässt zwei Bälle fallen, die jedoch bei genauerem Hinschauen nicht parallel zueinander zu Boden fallen, sondern sie nähern sich leicht an, da die Gravitationskraft zum Erdmittelpunkt gerichtet ist. Das ist der sogenannte Gezeiteneffekt. Durch ihn kann man feststellen, ob man sich in einem Gravitationsfeld oder in einem gravitationsfreien Raum befindet [Gaßner und J. Müller 2022, S. 222].

Das aus dieser Erkenntnis verbesserte Äquivalenzprinzip lautet wie folgt: „In jedem frei fallenden Bezugssystem gelten dieselben physikalischen Gesetze wie in der Speziellen

Relativitätstheorie [,] solange Gezeitenkräfte vernachlässigt werden können“ [Einstein Online, Äquivalenzprinzip 2011].

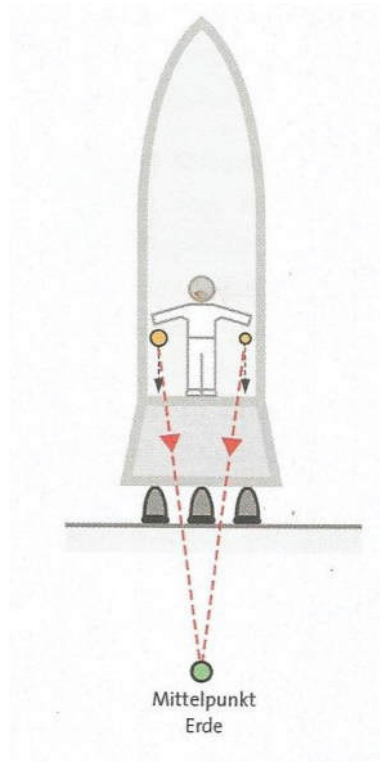


Abbildung 7: Gezeiteneffekt [Gaßner und J. Müller 2022, S. 222]

Um Gezeitenkräfte vernachlässigen zu können, hat Einstein einen Trick angewendet: Wenn man das Gesamtbild so verkleinert, dass der Boden, auf dem die Rakete steht, nicht mehr als Kugeloberfläche, sondern als lokal ebene Fläche angesehen werden kann, und somit die Bälle so nahe zusammen zu Boden fallen, sodass sie parallel fallen, sind die beiden Szenarien wie in Abbildung (6) dargestellt wieder identisch [Gaßner und J. Müller 2022, S. 222-223].

## 2.5 Erklärung der Einsteinschen Feldgleichungen

Ebenfalls sehr elementar in der allgemeinen Relativitätstheorie sind die Einsteinschen Feldgleichungen. Sie dienen dazu, die Gravitation mithilfe von sogenannten Tensoren zu beschreiben. Der Vorteil eines solchen Tensors ist, dass er (im Falle eines symmetrischen Vierer-Tensors) zehn Gleichungen ersetzt; somit stellt er eine große Erleichterung in der Mathematik dar. Mithilfe von Tensoren kann man das Verhalten der Krümmung von jedem beliebigen Punkt aus in alle sechs Raumrichtungen beschreiben, also oben, unten, links, rechts, vorne und hinten. Da ein Tensor in der allgemeinen Relativitätstheorie zehn Einträge hat, bleiben noch vier Einträge für die Zeit und Erhaltungssätze übrig. In Abbildung 8 ist ein metrischer Tensor  $\eta_{ij}$  dargestellt. Da der metrische Tensor  $\eta_{ij}$  symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale ist, können die Einträge links unterhalb der Hauptdiagonalen auch weggelassen werden. Statt der Nullen

und Einsen können auch andere Einträge der Raumkrümmung entsprechend stehen. Man schreibt also eine Gleichung hin, die für zehn individuelle Einträge verstanden wird.

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung 8: Beispiel für einen Vierer-Tensor [Gaßner und J. Müller 2022, S. 238]

Die gesamte Idee der allgemeinen Relativitätstheorie kann in einer Feldgleichung beschrieben werden, die wie folgt lautet:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Dabei dient der Einsteintensor  $G_{\mu\nu}$  zur Darstellung der Krümmung, er beschreibt also den Weg der Masse. In ihm sind die Informationen des symmetrischen Vierer-Tensors verarbeitet. Der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  beeinflusst die Krümmung und beinhaltet jede Form der Energiedichte, also Masse, Druck und Energie. Multipliziert wird der Energie-Impuls-Tensor mit der Einsteinschen Gravitationskonstante  $\frac{8\pi G}{c^4}$ , wobei  $G$  die Gravitationskonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.

Mit dieser Gleichung hätte Einstein auf die Expansion des Universums und den Beginn des Universums in einem Urknall schließen können. Stattdessen hat er jedoch die Konstante  $\Lambda$  eingeführt, da er damit die Statik des Universums sicherzustellen glaubte. Die veränderte Feldgleichung lautet dann:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Durch die kosmologische Konstante  $\Lambda$  kann die Energiedichte des Vakuums beschrieben werden. Durch die Multiplikation mit dem metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  wird der zweite Summand ebenfalls zu einem Tensor [Gaßner und J. Müller 2022, S. 233-241].

Einstein hat im Nachhinein bereut, die kosmologische Konstante eingeführt zu haben. Dabei hätte er den Term nur anders begründen müssen. Mittlerweile ist der zusätzliche Term als korrekt anerkannt [Fließbach 2016, S. 328].

Statt des Einsteintensors kann man auch  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  schreiben.  $R_{\mu\nu}$  ist der Ricci-Tensor,  $g_{\mu\nu}$  ist der metrische Tensor und  $R$  der Ricci-Skalar [Gaßner und J. Müller 2022, S. 233-241].

Was man aus der Einsteinschen Feldgleichung lernen kann, beschreiben Gaßner und Müller folgendermaßen: „Die Verteilung der im Raum vorhandenen Energie sagt dem

Raum, wie er sich zu krümmen hat, wogegen die Krümmung des Raumes bestimmt, wie sich die Dinge zu bewegen haben. Dieses Wechselspiel bestimmt unsere Welt“ [Gaßner und J. Müller 2022, S. 239].

## 2.6 Zeitdilatation in einem beschleunigten System

### 2.6.1 Erläuterung der gravitativen Zeitdilatation

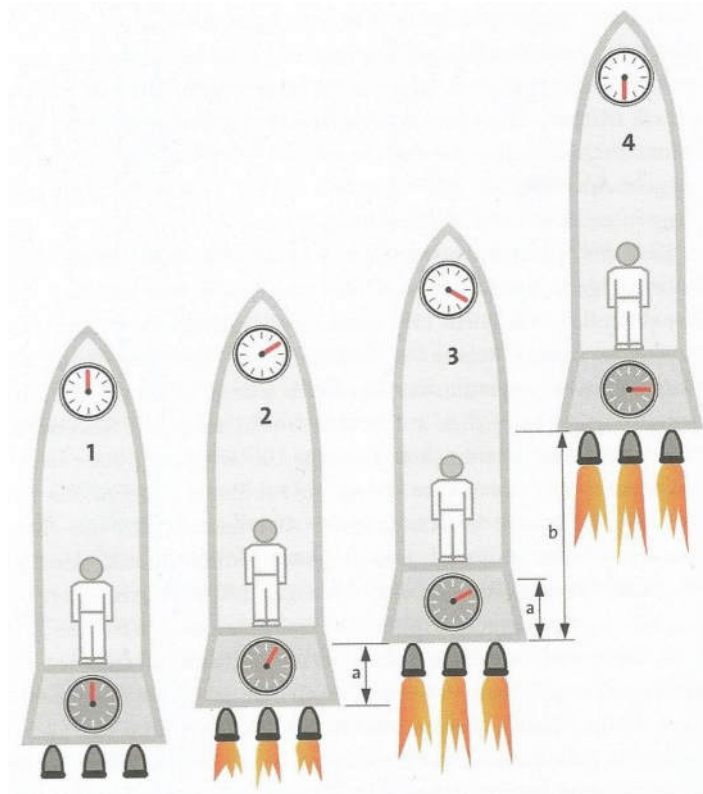


Abbildung 9: Zeitdilatation am Beispiel einer Rakete zu verschiedenen Zeitpunkten [Gaßner und J. Müller 2022, S. 250]

Um die Zeitdilatation in einem beschleunigten System zu verstehen, wird folgendes Gedankenexperiment gemacht: In Abbildung 9 ist eine Rakete, die sich im gravitationsfreien Raum befindet, zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. In der Rakete sind an der Spitze und am Boden der Rakete jeweils eine Uhr angebracht, die synchronisiert sind. Jede Sekunde schicken die Uhren ein Zeitsignal an die jeweils andere Uhr. Die linke Rakete wird nicht beschleunigt, somit vergeht die Zeit für beide Uhren gleich schnell.

Nun wird das Triebwerk der Rakete angezündet, sie wird also beschleunigt. Dabei werden die Zeitsignale weiterhin gesendet. Zunächst wird nur die Situation aus Sicht der unteren Uhr betrachtet. Da die Rakete nun nach oben beschleunigt, haben die Photonen, die von der oberen Uhr ausgesendet werden, eine etwas kleinere Strecke zurückzulegen als vor der Zündung, denn die untere Uhr fliegt der oberen Uhr nun entgegen. Somit kommt das Zeitsignal schneller an der unteren Uhr an als zuvor. Aus Sicht der

unteren Uhr geht die obere Uhr also schneller. Beim nächsten Zeitsignal befindet sich die Rakete wieder ein wenig weiter oben. Aufgrund der gleichmäßigen Beschleunigung ist der Wegunterschied nicht genauso groß wie beim vorherigen Zeitsignal, sondern noch größer. Die untere Uhr registriert also wieder, dass das Zeitsignal schneller bei ihr ankommt als zuvor. Aus Sicht der oberen Uhr funktioniert das genau umgekehrt. Beschleunigt die Rakete nach oben, hat das Photon, das von der unteren Uhr ausgesendet wird, einen längeren Weg zurückzulegen als zuvor. Somit kommt das Zeitsignal verspätet bei der oberen Uhr an. Die untere Uhr geht also aus Sicht der oberen Uhr langsamer. Die voneinander abweichenden Uhrzeiten sind auch in der Abbildung 9 zu sehen.

Wird nun das Äquivalenzprinzip herangezogen, ist das Szenario in der beschleunigten Rakete identisch zu dem Szenario in dem Gravitationsfeld der Erde, vorausgesetzt, die Rakete beschleunigt mit Erdbeschleunigung. Wenn die Rakete demnach senkrecht auf der Erdoberfläche stehen würde, geht die Uhr am Boden der Rakete, also die Uhr, die sich näher an der Erdoberfläche befindet, langsamer als die Uhr, die sich an der Spitze der Rakete befindet. Gravitative Zeitdilatation bedeutet also, dass die Zeit in einem stärkeren Gravitationsfeld langsamer vergeht als in einem schwächeren [Gaßner und J. Müller 2022, S. 249-251].

### 2.6.2 Bedeutung für GPS-Systeme

Bei GPS-Systemen ist die allgemeine Relativitätstheorie nicht mehr wegzudenken. Atomuhren, die über der Erde in Satelliten verbaut sind, senden regelmäßig Zeitsignale zur Erde, die dann von Empfängern genutzt werden, um die Entfernung zwischen den Satelliten und dem Empfänger zu berechnen. Wie im vorherigen Kapitel bereits herausgearbeitet, gehen diese Atomuhren schneller als die Uhren, die sich auf der Erdoberfläche befinden, da das Gravitationsfeld am Ort der Atomuhren geringer ist. Diese zwar geringe Abweichung ist für die Funktionsfähigkeit der GPS-Systeme dennoch von entscheidender Bedeutung. Für Satelliten, die sich 20.000 Kilometer über der Erde befinden, bedeutet das eine Abweichung von 45 Mikrosekunden pro Tag, um welche die Satellitenuhren schneller gehen.

Um die Abweichung der Entfernung pro Tag zu berechnen, wird folgende Rechnung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{s}{t} \quad | \cdot t \\
 s &= c \cdot t \\
 s &= 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 45 \cdot 10^{-6} s \\
 s &\approx 11,4 km
 \end{aligned}$$

Nach einer Woche würde sich also schon eine Abweichung von 80 Kilometern ergeben.

Laut der speziellen Relativitätstheorie gehen bewegte Uhren langsamer. Wird dieser relativistische Effekt mitberücksichtigt, gehen die Satellitenuhren um 38 Mikrosekunden pro Tag schneller als die auf der Erde. Experten müssen diese Abweichung korrigieren, indem sie die Satellitenuhren um 38 Mikrosekunden langsamer laufen lassen als die Uhren auf der Erde [Quantenwelt 2016], [Wissenschaft.de 2015].

## 3 Periheldrehung

### 3.1 Erklärung der Periheldrehung

Die allgemeine Relativitätstheorie wurde durch viele Experimente und Beobachtungen bestätigt. Ein Beispiel für eine der zahlreichen experimentellen Bestätigungen ist die relativistische Periheldrehung des Merkur. Das erste Keplersche Gesetz besagt, dass sich alle Planeten in unserem Sonnensystem auf elliptischen Bahnen bewegen, in deren einen Brennpunkt die Sonne liegt. Das Perihel des Merkur, also der sonnennächste Punkt, dreht sich jedoch im Laufe des Jahrhunderts. Die Periheldrehung ist in Abbildung 10 dargestellt.

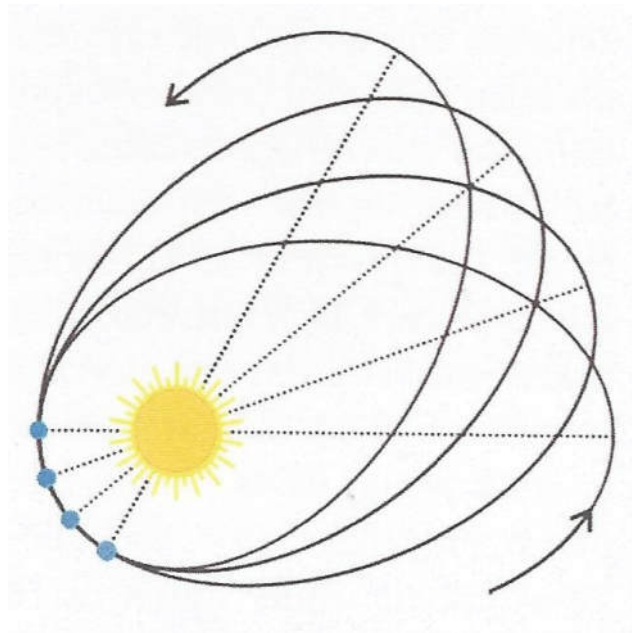


Abbildung 10: Rotation des Merkur um die Sonne. In blau ist das Perihel der jeweiligen Bahn dargestellt. Da das Perihel nicht ortsfest ist, spricht man auch von der Periheldrehung. [Gaßner und J. Müller 2022, S. 263]

Beobachtet wurde ein Wert von 574,6 Bogensekunden pro Jahrhundert. Die anderen Planeten, insbesondere Venus und Jupiter, wirken eine Anziehungskraft auf den Merkur aus und lenken ihn somit bei jedem Umlauf um die Sonne ein wenig ab. Der mit dieser Korrektur berechnete Wert liegt bei 531,6 Bogensekunden, er weicht also vom

beobachteten Wert ein wenig ab. Erst mit der allgemeinen Relativitätstheorie lässt sich die Abweichung von ungefähr 43 Bogensekunden erklären.

Die Gravitationswirkung der Sonne auf den Merkur variiert je nach seiner Position in seiner Umlaufbahn. Wenn der Merkur der Sonne im Perihel sehr nahe kommt, wird er von einem stärkeren Gravitationsfeld der Sonne beeinflusst. Dadurch treten die relativistischen Effekte verstärkt auf, was dazu führt, dass der Merkur stärker von seinem ursprünglichen Kurs abgelenkt wird. Im Gegensatz dazu ist das Gravitationsfeld der Sonne schwächer, wenn sich der Merkur im Aphel, dem sonnenfernsten Punkt seiner Bahn, befindet, und die relativistischen Effekte sind weniger ausgeprägt. Somit kommt die Periheldrehung nur aufgrund der Ellipsenbahn zustande und nicht bei einer Kreisbahn. Da sich die Erde nahezu auf einer Kreisbahn bewegt, beträgt der berechnete Wert für die relativistische Periheldrehung der Erde nur 3,8 Bogensekunden pro Jahrhundert [Gaßner und J. Müller 2022, S. 262-263], [Physik-Schule 2010].

### 3.2 Berechnung der relativistischen Periheldrehung des Merkur

In Abbildung 11 ist die Umlaufbahn des Merkur um die Sonne dargestellt. Dabei ist  $r_-$  der Perihelabstand und  $r_+$  der Aphelabstand.  $\Phi$  ist der momentane Winkel des Merkur im Polarkoordinatensystem, von dem der momentane Radius  $r(\Phi)$  abhängig ist.  $\Phi_+$  ist der Winkel, unter dem  $r_+$  erscheint, und  $\Phi_-$  der Winkel, unter dem  $r_-$  erscheint.

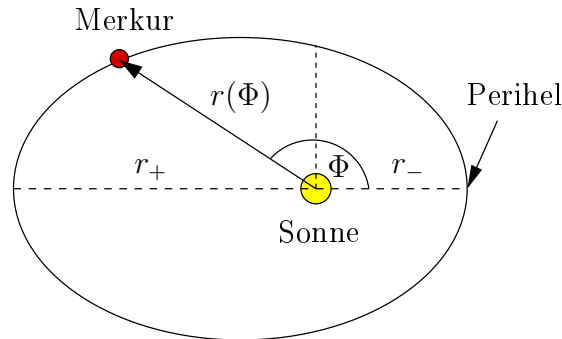


Abbildung 11: Periheldrehung des Merkur [vgl. Fließbach 2016, S. 153]

Für die Änderung des Winkels zwischen  $r_+$  und  $r_-$  gilt folgendes Integral:

$$\Phi_+ - \Phi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}} = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{d\Phi}{dr}, \quad (1)$$

$$\text{wobei } K(r) = \frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2} \quad (2)$$

Dabei sind  $B(r)$  und  $A(r)$  Koeffizienten in der Standardform der Schwarzschild-Metrik und  $F$  und  $l$  Integrationskonstanten. Ein Bahndurchlauf beginnt bei  $r_-$  bzw.  $\Phi_-$ , geht über  $r_+$  bzw.  $\Phi_+$  und endet wieder bei  $r_-$ .

Die Winkeländerung für den vollständigen Bahndurchlauf lässt sich mit  $2(\Phi_+ - \Phi_-)$  berechnen. Wäre die Winkeländerung  $2\pi$ , was bei einer Ellipsenbahn der Fall ist, dann hätte das Perihel seine Position nicht verändert. Für eine geschlossene Ellipse gilt also:  $2(\Phi_+ - \Phi_-) = 2\pi$

Um herauszufinden, wie groß die Differenz, also die Winkeländerung nach einem Umlauf beim Merkur tatsächlich ist, setzt man für die Periheldrehung an:  $\Delta\Phi = 2(\Phi_+ - \Phi_-) - 2\pi$

An Perihel und Aphel verschwindet die Änderung des Radius mit dem Winkel (lokales Extremum), es gilt also: bei  $r = r_{\pm} : \left(\frac{dr}{d\Phi}\right)_{r_{\pm}} = 0$ , somit gilt umgekehrt:  $\frac{d\Phi}{dr} \rightarrow \infty (r \rightarrow r_{\pm})$  und damit ist in Gleichung (1)  $K(r_{\pm}) = 0$ . Damit  $K(r_{\pm})$  null werden kann, müssen die Brüche  $\frac{F^2}{B(r)l^2}$  und  $\frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}$  gleich groß sein.

Damit ergibt sich aus (2):

$$\begin{aligned} \frac{F^2}{l^2 B_{\pm}} &= \frac{1}{r_{\pm}^2} + \frac{c^2}{l^2} \quad | - \frac{c^2}{l^2} \quad | \cdot B_{\pm} \\ \frac{F^2}{l^2} - \frac{c^2 \cdot B_{\pm}}{l^2} &= \frac{B_{\pm}}{r_{\pm}^2} \end{aligned}$$

Nun wird für die extremalen Größen die Differenz gebildet. Die minimale Größe wird also von der maximalen Größe subtrahiert.

$$\frac{B_+}{r_+^2} - \frac{B_-}{r_-^2} = \left( \frac{F^2}{l^2} - \frac{c^2 \cdot B_+}{l^2} \right) - \left( \frac{F^2}{l^2} - \frac{c^2 \cdot B_-}{l^2} \right)$$

Durch Auflösen der Klammern und anschließendes Ausklammern sowie Bilden eines Doppelbruchs lässt sich die Gleichung wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{B_+}{r_+^2} - \frac{B_-}{r_-^2} &= -\frac{c^2}{l^2} \cdot (B_+ - B_-) \quad | \cdot \left( -\frac{1}{B_+ - B_-} \right) \\ - \left( \frac{B_+}{r_+^2 \cdot (B_+ - B_-)} - \frac{B_-}{r_-^2 \cdot (B_+ - B_-)} \right) &= \frac{c^2}{l^2} \\ \frac{c^2}{l^2} &= -\frac{\frac{B_+}{r_+^2} - \frac{B_-}{r_-^2}}{B_+ - B_-} \end{aligned}$$

Nun wird mit  $r_+^2 \cdot r_-^2$  erweitert, um  $r_+^2$  bzw.  $r_-^2$  kürzen zu können:

$$\frac{c^2}{l^2} = -\frac{B_+ r_-^2 - B_- r_+^2}{r_+^2 r_-^2 \cdot (B_+ - B_-)}$$

Wenn man nun mit  $\frac{1}{B_+ \cdot B_-}$  erweitert und anschließend das Minus in den Bruch hinein-



zieht, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{l^2} &= -\frac{\frac{r_-^2}{B_-} - \frac{r_+^2}{B_+}}{r_+^2 r_-^2 \cdot \left(\frac{1}{B_-} - \frac{1}{B_+}\right)} \\ \frac{c^2}{l^2} &= \frac{\frac{r_-^2}{B_-} - \frac{r_+^2}{B_+}}{r_+^2 r_-^2 \cdot \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)}\end{aligned}\quad (3)$$

Um später in  $K(r)$  auch  $\frac{F^2}{l^2}$  einsetzen zu können, werden zunächst die Gleichungen  $\frac{F^2}{l^2 B_{\pm}} = \frac{1}{r_{\pm}^2} + \frac{c^2}{l^2}$  folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{F^2}{l^2} \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right) &= \left(\frac{1}{r_+^2} + \frac{c^2}{l^2}\right) - \left(\frac{1}{r_-^2} + \frac{c^2}{l^2}\right) \\ \frac{F^2}{l^2} \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right) &= \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \quad | : \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right) \\ \frac{F^2}{l^2} &= \frac{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}}{\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}}\end{aligned}$$

Nach Erweiterung mit  $r_+^2 r_-^2$ , um anschließend kürzen zu können, erhalten wir:

$$\frac{F^2}{l^2} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)}\quad (4)$$

Nun werden  $\frac{c^2}{l^2}$  und  $\frac{F^2}{l^2}$  in  $K(r)$  aus (2) durch (3) und (4) ersetzt:

$$\begin{aligned}K(r) &= \frac{F^2}{l^2} \frac{1}{B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2} \\ &\stackrel{(4)(3)}{=} \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \frac{1}{B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{\frac{r_-^2}{B_-} - \frac{r_+^2}{B_+}}{r_+^2 r_-^2 \cdot \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \\ &= \frac{\frac{r_-^2}{B(r)} - \frac{r_+^2}{B(r)}}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} - \frac{1}{r^2} - \frac{\frac{r_-^2}{B_-} - \frac{r_+^2}{B_+}}{r_+^2 r_-^2 \cdot \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)}\end{aligned}$$

Um die Gleichung vollständig zu vereinfachen, werden die zwei großen Brüche auf einen Bruchstrich geschrieben und  $r_-^2$  und  $r_+^2$  anschließend ausgeklammert:

$$K(r) = \frac{r_-^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_-}\right) - r_+^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_+}\right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} - \frac{1}{r^2}\quad (5)$$

Zur weiteren Vereinfachung wird die Robertson-Entwicklung angewendet. Bei der Robertson-

Entwicklung werden eine schwache gravitative Wechselwirkung sowie eine homogene Massenverteilung angenommen [Fließbach 2016, S. 132-133, 152–153], [Goethe-Universität Frankfurt 2020]. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
A(r) &= 1 + \gamma \frac{r_s}{r} + \dots \\
B(r) &= 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\beta - \gamma}{2} \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 + \dots \\
\frac{1}{B(r)} &= 1 + \frac{r_s}{r} + \underbrace{\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{\beta - \gamma}{2}\right)}_{=\eta} + \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist  $r_s$  der Schwarzschildradius, der die natürliche Grenze eines schwarzen Loches beschreibt.  $\gamma$  und  $\beta$  sind zunächst beliebige dimensionslose Konstanten. Sie nehmen für die allgemeine Relativitätstheorie und Newtonschen Gravitation unterschiedliche Werte an. Der Wert für die allgemeine Relativitätstheorie wird später angegeben.

Durch Einsetzen der Robertson-Entwicklung für  $\frac{1}{B(r)}$  bis zur 1. Ordnung in (5) ergibt sich:

$$K(r) = C \left(\frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_+}\right) \tag{7}$$

Dabei ist  $r_s$  der Schwarzschildradius und C eine Konstante, in der sämtliche von r unabhängige Faktoren zusammengefasst werden.

Für  $r \rightarrow \infty$  gilt:  $K(r) \xrightarrow{(7)} -C \frac{r_s^2}{r_+ r_-}$  und  $\frac{1}{B(r)} \rightarrow 1$ . Damit ergibt sich aus (5):

$$K(r) \rightarrow \frac{r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-}\right) - r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+}\right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \tag{8}$$

Aus dem Grenzwert  $K(r) \rightarrow -C \frac{r_s^2}{r_+ r_-}$  leiten wir durch Multiplikation mit  $-r_+ r_-$  ab:

$$K(r) \cdot (-r_+ r_-) \rightarrow C r_s^2$$

In  $K(r)$  kann nun der Bruch aus (8) eingesetzt werden. Für sehr große  $r$  gilt damit:

$$\begin{aligned}
C r_s^2 &\stackrel{(8)}{=} \frac{r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-}\right) - r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+}\right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)} \cdot (-r_+ r_-) \\
&= \frac{r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+}\right) - r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-}\right)}{r_+ r_- \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)}
\end{aligned}$$

Nun wird die Robertson-Entwicklung bis zur 2. Ordnung für  $\frac{1}{B(r)}$  auf  $r_{\pm}$  angewendet:

$$\begin{aligned}
Cr_s^2 &= \frac{r_+^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} \cdot \eta \right) \right] - r_-^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r_s}{r_-} + \frac{r_s^2}{r_-^2} \cdot \eta \right) \right]}{r_+ r_- \left[ \left( 1 + \frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} \cdot \eta \right) - \left( 1 + \frac{r_s}{r_-} + \frac{r_s^2}{r_-^2} \cdot \eta \right) \right]} \\
&= \frac{r_+^2 \left( -\frac{r_s}{r_+} - \frac{r_s^2}{r_+^2} \cdot \eta \right) - r_-^2 \left( -\frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s^2}{r_-^2} \cdot \eta \right)}{r_+ r_- \left( \frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} \cdot \eta - \frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s^2}{r_-^2} \cdot \eta \right)} \\
&= \frac{-r_+ r_s - r_s^2 \eta + r_s + r_- r_s + r_s^2 \eta}{r_+ r_- \left( \frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s^2}{r_+^2} \cdot \eta - \frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s^2}{r_-^2} \cdot \eta \right)}
\end{aligned}$$

Nun wird  $r_s$  ausgeklammert und anschließend umgeformt sowie gekürzt:

$$\begin{aligned}
Cr_s^2 &= \frac{r_s (-r_+ - \eta r_s + r_- + \eta r_s)}{r_+ r_- \left( \frac{r_s}{r_+} + \eta \frac{r_s^2}{r_+^2} - \frac{r_s}{r_-} - \eta \frac{r_s^2}{r_-^2} \right)} \\
&= \frac{r_s (r_- - r_+)}{r_+ r_- \left[ \eta r_s^2 \left( \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right) + \frac{r_s}{r_+} - \frac{r_s}{r_-} \right]}
\end{aligned}$$

Als Nächstes wird im Nenner  $\frac{1}{r_+^2}$  mit  $r_-^2$  erweitert und  $\frac{1}{r_-^2}$  mit  $r_+^2$  erweitert, damit die beiden Brüche auf einen Bruchstrich geschrieben werden können. Im Nenner wird im zweiten Summanden  $r_s$  ausgeklammert und wie im ersten Summanden erweitert.

$$\begin{aligned}
Cr_s^2 &= r_s \frac{r_- - r_+}{r_+ r_- \left[ \eta r_s^2 \left( \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2} \right) + r_s \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right) \right]} \\
&= r_s \frac{r_- - r_+}{\eta r_s^2 \frac{r_+ r_- (r_-^2 - r_+^2)}{r_+^2 r_-^2} + r_s \frac{r_+ r_- (r_- - r_+)}{r_+ r_-}} \\
&= r_s \frac{r_- - r_+}{r_s (r_- - r_+) + \eta r_s^2 \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+ r_-}}
\end{aligned}$$

Nun wird im Nenner beim zweiten Summanden die dritte binomische Formel angewendet. Anschließend werden  $(r_- - r_+)$  und  $r_s$  gekürzt:

$$\begin{aligned}
Cr_s^2 &= r_s \frac{r_- - r_+}{r_s (r_- - r_+) + \eta r_s^2 \frac{(r_- + r_+)(r_- - r_+)}{r_+ r_-}} \\
&= \frac{1}{1 + \eta r_s \frac{r_- + r_+}{r_+ r_-}}
\end{aligned}$$

Mit der Taylor-Entwicklung (vgl. Anhang)  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots$  für  $|x| \ll 1$  bis zur ersten Ordnung erhält man für  $x = \eta r_s \frac{r_- + r_+}{r_+ r_-}$  [Rottmann 1993, S. 119]:

$$\begin{aligned}
Cr_s^2 &\approx 1 - \frac{\eta r_s}{r_+ r_-} (r_- + r_+) \\
Cr_s^2 &= 1 - \eta \left( \frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s}{r_-} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Nun wird  $K(r)$  gemäß (7) in das Integral in (1) eingesetzt. Für  $A(r)$  wird ebenfalls die Robertson-Entwicklung angewendet. Somit ergibt sich für die Winkeländerung folgende Gleichung:

$$\Phi_+ - \Phi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{1 + \gamma \frac{r_s}{r}}{C \left( \frac{r_s}{r_-} - \frac{r_s}{r} \right) \left( \frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_+} \right)}}$$

Nun wird folgendermaßen substituiert:  $z = \frac{r_s}{r}$ ,  $z_{\pm} = \frac{r_s}{r_{\pm}}$ . Dabei ergibt sich für die Ersetzung von  $\frac{dr}{r^2}$  durch Ableitung von  $z = \frac{r_s}{r}$  folgendes:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{r_s}{r} \quad \left| \frac{d}{dr} \right. \\
\frac{dz}{dr} &= -\frac{r_s}{r^2} \quad \left| \cdot dr \right. \\
dz &= -\frac{r_s}{r^2} dr \quad \left| : (-r_s) \right. \\
-\frac{dz}{r_s} &= \frac{dr}{r^2} \\
-\frac{1}{\sqrt{r_s^2}} dz &= \frac{dr}{r^2}
\end{aligned}$$

Außerdem wird die Taylor-Entwicklung  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \dots$  für  $x = \gamma \frac{r_s}{r}$ , wobei  $|x| \ll 1$ , angewendet [Rottmann 1993, S. 119]. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$\Phi_+ - \Phi_- \approx -\frac{1}{\sqrt{Cr_s^2}} \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{1 + \frac{\gamma}{2}z}{\sqrt{(z_- - z)(z - z_+)}} \tag{10}$$

Mit (9) können wir auch den Vorfaktor des Integrals umformen:

$$-\frac{1}{\sqrt{Cr_s^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta(z_+ + z_-)}}$$

Nun wird die Taylor-Entwicklung  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x - \dots$  für  $x = \eta(z_+ + z_-)$  für  $|x| \ll 1$  angewendet [ebd., S. 119]:

$$-\frac{1}{\sqrt{Cr_s^2}} = -\left[ 1 + \frac{\eta}{2}(z_+ + z_-) \right]$$

Als Nächstes wird das Integral in (10) durch Einsetzen der oberen und unteren Grenze in die Stammfunktion gelöst. Im Anhang wird durch Ableitung nachgewiesen, dass der Term  $-\arcsin\left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[-\sqrt{(z_- - z)(z - z_+)} - \frac{z_+ + z_-}{2}\arcsin\left(\frac{z_+ + z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)\right]$  die Stammfunktion des Integranden ist.

$$\begin{aligned} & \int_{z_-}^{z_+} dz \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma}{2}z}{(z_- - z)(z - z_+)}} = \\ & = \left[ -\arcsin\left(\frac{z_+ + z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right) + \frac{\gamma}{2}\left[-\sqrt{(z_- - z)(z - z_+)} - \frac{z_+ + z_-}{2}\arcsin\left(\frac{z_+ + z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)\right] \right]_{z_-}^{z_+} \end{aligned}$$

Nun werden die obere und untere Grenze in die Stammfunktion eingesetzt und der Term wird anschließend vereinfacht. Beim Einsetzen in die Stammfunktion muss beachtet werden, dass  $r_+ > r_-$  und somit  $z_- > z_+$  gilt.

$$\int_{z_-}^{z_+} dz \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma}{2}z}{(z_- - z)(z - z_+)}} = \left(1 + \gamma \frac{z_+ + z_-}{4}\right) \underbrace{[-\arcsin(1) + \arcsin(-1)]}_{=-\pi} \quad (11)$$

Aus (9), (10) und (11) ergibt sich für die Winkeländerung die Gleichung

$$\Phi_+ - \Phi_- \approx \pi \left[1 + \frac{\eta}{2}(z_+ + z_-)\right] \left[1 + \frac{\gamma}{4}(z_+ + z_-)\right]$$

Der Schwarzschildradius befindet sich im Millimeter-Bereich und der maximale und minimale Abstand von Sonne zum Merkur beträgt mehrere Millionen Kilometer. Somit ist  $z_{\pm} = \frac{r_s}{r_{\pm}}$  sehr klein. Folglich kann man das Produkt  $\frac{\eta}{2}(z_+ + z_-) \cdot \frac{\gamma}{4}(z_+ + z_-)$  vernachlässigen und erhält

$$\Phi_+ - \Phi_- \approx \pi \left[1 + \frac{2\eta + \gamma}{4}(z_+ + z_-)\right]$$

Durch Resubstitution und Einsetzen von  $\eta = 1 - \frac{\beta - \gamma}{2}$  ergibt sich die Gleichung:

$$\Phi_+ - \Phi_- = \pi \left[1 + \frac{2 - \beta + 2\gamma}{4} \left(\frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s}{r_-}\right)\right]$$

Dieser Ausdruck wird in die Definition der Periheldrehung  $\Delta\Phi = 2(\Phi_+ - \Phi_-) - 2\pi$  eingesetzt. Damit ergibt sich für die Periheldrehung folgende Gleichung:

$$\Delta\Phi = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s}{r_-}\right) \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}$$

Für den Merkur gilt:

$$\frac{r_s}{r_+} + \frac{r_s}{r_-} \approx 1,064 \cdot 10^{-7}$$

Laut der allgemeinen Relativitätstheorie gilt:  $\beta = \gamma = 1$  und somit lässt sich die

Periheldrehung des Merkur schließlich folgendermaßen berechnen:

$$\Delta\Phi = \frac{3\pi}{2} \cdot 1,064 \cdot 10^{-7} \approx 5,014 \cdot 10^{-7}$$

Umrechnung ins Gradmaß:  $2\pi$  entsprechen  $360^\circ$ , somit entspricht  $1^\circ$  dem Wert  $\frac{2\pi}{360}$  im Bogenmaß. Eine Bogenminute ist ein sechzigstel eines Grades, also entspricht eine Bogenminute  $\frac{2\pi}{360 \cdot 60}$  und eine Bogensekunde  $\frac{2\pi}{360 \cdot 3600}$  jeweils im Bogenmaß. Damit ergibt sich für die Periheldrehung des Merkur:

$$\Delta\Phi = 5,014 \cdot 10^{-7} \cdot \left( \frac{360 \cdot 3600}{2\pi} \right)'' \approx 0,103''$$

Da der Merkur ungefähr 415 Sonnenumläufe pro Jahrhundert macht, ergibt sich

$$\Delta\Phi \cdot 415 \approx 42,92''$$

Damit kann die Differenz der beobachteten 575 Bogensekunden und der aufgrund der Störung durch andere Planeten berechneten 532 Bogensekunden erklärt werden. Es war alleine Einsteins allgemeine Relativitätstheorie, durch die das Mysterium der Periheldrehung des Merkur aufgelöst werden und die experimentell beobachtete Abweichung der 43 Bogensekunden erklärt werden konnte [Goethe-Universität Frankfurt 2020].

## 4 Rückblick und neue Horizonte der Forschung

In dieser Seminararbeit haben wir uns eingehend mit faszinierenden Themen der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigt — den Grundaussagen dieser bedeutenden Theorie und der relativistischen Periheldrehung.

Einstein lehrt uns, dass Raum und Zeit zu einem Raumzeit-Kontinuum verbunden werden können und dass dieses in Anwesenheit von Masse oder Energie gekrümmt wird. Aus dieser Raumzeit-Krümmung resultiert die Gravitation. Sie wird also nicht mehr nur als simple Anziehungskraft verstanden, so wie Newton sie beschrieben hat. Einsteins Theorie hat uns außerdem die Vorstellung von schwarzen Löchern gegeben sowie die Entwicklung präziser Navigationssysteme ermöglicht. Ebenso haben wir gelernt, dass man auf den ersten Blick nicht zwischen Beschleunigung und Gravitation unterscheiden kann. Mit dem Einsteintensor wurde eine Schreibweise vorgestellt, mit der die gesamte Idee von Einstein in nur einer Gleichung zusammengefasst werden kann und dabei zehn Gleichungen durch diese eine ersetzt werden können. Am Beispiel der relativistischen Periheldrehung wird gezeigt, wie präzise Einsteins Vorhersagen experimentelle Beobachtungen erklären können, wo mit der klassischen Physik deutliche Abweichungen bleiben.

Die allgemeine Relativitätstheorie lehrt uns, dass physikalische Theorien niemals in Stein gemeißelt sind, sondern stets weiterentwickelt und verbessert werden können. Diese Theorie hat die Tür zu neuen wissenschaftlichen Erkenntnissen geöffnet und zu unzähligen Experimenten und Beobachtungen inspiriert, die unsere Sicht auf das Universum vertieft haben. Nun liegt es an den Forschern, die Quantentheorie und die allgemeine Relativitätstheorie in Einklang zu bringen. In diesem Sinne markiert die allgemeine Relativitätstheorie nicht das Ende unserer Suche nach Erkenntnis, sondern vielmehr den Anfang neuer physikalischer Forschungsergebnisse und Theorien, die uns das Universum und dessen Geschichte noch besser verstehen lassen [Fischer 2016, S.164].

## 5 Anhang

### Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die stetige Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, a+h]$ . Wenn die Funktion stetige Ableitungen bis zu Ordnung  $n-1$  sowie die  $n$ -te Ableitung im vorgegebenen Intervall besitzt, kann die Taylor-Entwicklung angewendet werden:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

[Bronstein u. a. 2001, S. 404].

### Ableitung der Stammfunktion

Um das Integral in Abschnitt 3.2 auf S. 21 zu lösen, wird die dort angegebene Stammfunktion abgeleitet, um die Stammfunktion-Eigenschaft nachzuweisen.

Die Ableitung vom  $\arcsin x$  lautet:  $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Um den Term  $\left[ -\arcsin\left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right) + \frac{\gamma}{2} \left[ -\sqrt{(z_- - z)(z - z_+)} - \frac{z_++z_-}{2} \arcsin\left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right) \right] \right]$  abzuleiten, werden die Quotientenregel und die Kettenregel mehrfach angewendet. Der abgeleitete Term lautet dann folgendermaßen:

$$F'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)^2}} \cdot \left( \frac{-2}{|z_+ - z_-|} \right) + \frac{\gamma}{2} \left[ \frac{2z - z_+ - z_-}{\sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)} \cdot 2} + \frac{z_+ + z_-}{2} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)^2}} \cdot \frac{(-2)}{|z_+ - z_-|} \right]$$

Zusammengefasst und ausmultipliziert ergibt sich:

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)^2} \cdot |z_+ - z_-|} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} + \frac{\gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z_++z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)^2} \cdot |z_+ - z_-|}$$

Der erste Bruch wird nun mit 2 erweitert, sodass der erste und der dritte Bruch zusammengefasst werden können.



$$F'(x) = \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z_+ + z_- - 2z}{|z_+ - z_-|}\right)^2} \cdot |z_+ - z_-|} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}}$$

Nun wird im Nenner des ersten Bruchs die 1 mit  $|z_+ - z_-|^2$  erweitert, damit sie gemeinsam mit dem anderen Bruch unter der Wurzel auf einen Bruchstrich geschrieben werden kann:

$$F'(x) = \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{|z_+ - z_-|^2 - (z_+ + z_- - 2z)^2}{|z_+ - z_-|^2}\right) \cdot |z_+ - z_-|}} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}}$$

Jetzt wird  $|z_+ - z_-|$ , also der dritte Faktor im Nenner des ersten Bruchs, quadriert und unter die Wurzel geschrieben. Im nächsten Schritt wird  $|z_+ - z_-|^2$  im Nenner des ersten Bruchs gekürzt und anschließend werden der Subtrahend und Minuend im Nenner des ersten Bruchs ausmultipliziert und vereinfacht:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{\frac{[|z_+ - z_-|^2 - (z_+ + z_- - 2z)^2] \cdot |z_+ - z_-|^2}{|z_+ - z_-|^2}}} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\ &= \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{|z_+ - z_-|^2 - (z_+ + z_- - 2z)^2}} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\ &= \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{(z_+^2 - 2z_+z_- + z_-^2) - (z_+^2 + z_+z_- - 2zz_+ + z_-z_+ + z_-^2 - 2zz_- - 2zz_+ - 2zz_- + 4z^2)}} \\ &\quad + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\ &= \frac{4 + \gamma \cdot (z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{-4z_+z_- + 4zz_+ + 4zz_- - 4z^2}} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \end{aligned}$$

Im Nenner des ersten Bruchs wird die 4 ausgeklammert, damit faktorisiert werden kann. Dadurch können die beiden Brüche auf einen Bruchstrich geschrieben werden. Durch Auflösen der Klammern und anschließender Vereinfachung erhält man schließlich den Integranden als Ableitung.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{4 + \gamma(z_+ + z_-)}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot (z_- - z)(z - z_+)}} + \frac{\gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\
&= \frac{4 + \gamma(z_+ + z_-) + \gamma \cdot (2z - z_+ - z_-)}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\
&= \frac{4 + \gamma z_+ + \gamma z_- + \gamma 2z - \gamma z_+ - \gamma z_-}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\
&= \frac{4 + \gamma \cdot 2z}{4 \cdot \sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}} \\
&= \frac{1 + \frac{\gamma}{2} \cdot z}{\sqrt{(z_- - z) \cdot (z - z_+)}}
\end{aligned}$$

## 6 Abbildungsverzeichnis

1	Raumzeit-Krümmung der Erde [scinexx-Wissensmagazin 2019]. . . . .	4
2	Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne [Einstein Online, Verbogene Lichtstrahlen 2010] . . . . .	6
3	Gravitationslinseneffekt [DLR 2011] . . . . .	6
4	Einstein-Kreuz, verursacht durch den Gravitationslinseneffekt [Einstein Online, Verbogene Lichtstrahlen 2010] . . . . .	7
5	Einstein-Ring, verursacht durch den Gravitationslinseneffekt [Fischer 2016, S. 80] . . . . .	8
6	Äquivalenzprinzip [Gaßner und J. Müller 2022, S. 221] . . . . .	8
7	Gezeiteneffekt [Gaßner und J. Müller 2022, S. 222] . . . . .	10
8	Beispiel für einen Vierer-Tensor [Gaßner und J. Müller 2022, S. 238] . .	11
9	Zeitdilatation am Beispiel einer Rakete zu verschiedenen Zeitpunkten [Gaßner und J. Müller 2022, S. 250] . . . . .	12
10	Rotation des Merkur um die Sonne. In blau ist das Perihel der jeweiligen Bahn dargestellt. Da das Perihel nicht ortsfest ist, spricht man auch von der Periheldrehung. [Gaßner und J. Müller 2022, S. 263] . . . . .	14
11	Periheldrehung des Merkur [vgl. Fließbach 2016, S. 153] . . . . .	15

## 7 Literatur

- Bartelmann, Matthias und Andreas Müller. *Gravitation-Jenseits von Einsteins Theorie*. in: Sterne und Weltraum, Ausgabe von April, 2022.
- Bronstein, Ilja N u. a. *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Auflage. Thun und Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 2001. ISBN: 3-8171-2005-2.
- Fischer, Kurt. *Relativitätstheorie in einfachen Worten-Ein Einstieg ohne komplizierte Mathematik*. 1. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. ISBN: 9783662469651.
- Fließbach, Torsten. *Allgemeine Relativitätstheorie*. 7. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. ISBN: 9783662531051.
- Gaßner, Josef und Jörn Müller. *Können wir die Welt verstehen? Meilensteine der Physik von Aristoteles bis zur Stringtheorie*. 5. Auflage. Frankfurt am Main: S. Fischer, 2022. ISBN: 9783103974812.
- Rottmann, Karl. *Mathematische Formelsammlung*. 4. Auflage. Mannheim: Wissenschaftsverlag, 1993. ISBN: 341170134X.

## 8 Quellen

- DLR. *Was sind Gravitationslinsen?* 2011. URL: [https://www.dlr.de/next/desktopdefault.aspx/tabid-6570/10786\\_read-24350/](https://www.dlr.de/next/desktopdefault.aspx/tabid-6570/10786_read-24350/). Stand: 25.10.2023.
- Einstein Online, Äquivalenzprinzip. *Kabine, Schwerkraft und Rakete: Das Äquivalenzprinzip*. 2011. URL: <https://www.einstein-online.info/spotlight/aequivalenzprinzip/>. Stand: 25.10.2023.
- Einstein Online, Gravitation. *Gravitation: Vom Fahrstuhl zur Raumzeitkrümmung*. 2010. URL: <https://www.einstein-online.info/spotlight/fahrstuhlkruemmung/>. Stand: 25.10.2023.
- Einstein Online, Lichtablenkung durch Gravitation. *Lichtablenkung durch Gravitation*. 2010. URL: <https://www.einstein-online.info/spotlight/lichtablenkung/>. Stand: 25.10.2023.
- Einstein Online, Verbogene Lichtstrahlen. *Allgemeine Relativitätstheorie/ Einsteiger-Tour Teil 4: Verbogene Lichtstrahlen*. 2010. URL: <https://www.einstein-online.info/lichtstrahlen/>. Stand: 25.10.2023.
- Goethe-Universität Frankfurt. *Periheldrehung*. 2020. URL: [https://itp.uni-frankfurt.de/~drischke/10\\_Periheldrehung.pdf](https://itp.uni-frankfurt.de/~drischke/10_Periheldrehung.pdf). Stand: 25.10.2023.
- Leifi Physik. *Gravitationsgesetz von NEWTON*. 2019. URL: <https://www.leifiphysik.de/mechanik/gravitationsgesetz-und-feld/grundwissen/gravitationsgesetz-von-newton>. Stand: 25.10.2023.
- Physik-Schule. *Apsidendrehung*. 2010. URL: <https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Apsidendrehung>. Stand: 25.10.2023.
- Quantenwelt. *Relativität in der Satellitennavigation*. 2016. URL: <http://www.quantenwelt.de/technik/GPS/relativitaet.html>. Stand: 25.10.2023.
- RND. *Relativitätstheorie bestätigt: Forschende entdecken Licht hinter Schwarzem Loch*. 2021. URL: <https://www.rnd.de/wissen/relativitaetsstheorie-licht-hinter-schwarzem-loch-entdeckt-albert-einstein-hatte-recht-R7D7I4POTVGIXHWGSIT4YD0YB4.html>. Stand: 25.10.2023.
- scinnexx-Wissensmagazin. *Die Raumzeit ist symmetrisch*. 2019. URL: <https://www.scinnexx.de/news/technik/die-raumzeit-ist-symmetrisch/>. Stand: 25.10.2023.
- Spektrum, Einstein-Ring. *Einstein-Ring*. 2014. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/einstein-ring/89>. Stand: 25.10.2023.
- Spektrum, Gravitationswellen. *Allgemeine Relativitätstheorie*. 1998. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/allgemeine-relativitaetsstheorie/383>. Stand: 25.10.2023.
- Spektrum, Raumzeit. *Raumzeit*. 2014. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/raumzeit/393>. Stand: 25.10.2023.
- Wissenschaft.de. *Ohne Einstein kein Navi*. 2015. URL: <https://www.wissenschaft.de/technik-digitales/ohne-einstein-kein-navi/>. Stand: 25.10.2023.

## 9 Erklärung zur Seminararbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche gekennzeichnet habe.

Bruckmühl, den 25. Oktober 2023

.....

Unterschrift