

## SEMINARARBEIT

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:

Astrophysik

Leitfach: Physik

Thema der Arbeit:

### **Schwarzkörperstrahlung – Temperatur und Strahlungsleistung und die Anwendung auf Schwarze Löcher**

Verfasser/in: Elisabeth Döring

Kursleiter/in:  
OStR Herr Koch

Abgabetermin:

07 November 2023

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
Summe:					
Gesamtleistung nach § 61 (7) GSO = Summe : 2 (gerundet)					

---

Datum und Unterschrift der Kursleiterin bzw. des Kursleiters

# Gliederung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bedeutung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Schwarzkörperstrahlung</b>	<b>2</b>
2.1	Definition von Schwarzkörpern . . . . .	2
2.2	Schwarzkörperstrahlung - planck'sche Strahlungsformel . . . . .	2
2.3	Berechnung der Temperatur eines Schwarzkörpers . . . . .	4
2.3.1	Berechnung der Temperatur mit Hilfe des Maximums . . . . .	4
2.3.2	Anwendung auf eine Simulation . . . . .	5
2.3.3	Bestimmung der Temperatur mit der Curve-Fit Funktion . . . . .	7
2.4	Berechnung der Strahlungsleistung eines Schwarzkörpers . . . . .	8
2.4.1	Berechnung der Strahlungsleistung mit Hilfe des Integrals . . . . .	8
2.4.2	Numerische Verifizierung durch Riemannsches Integral . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Schwarze Löcher</b>	<b>13</b>
3.1	Definition Schwarze Löcher . . . . .	13
3.2	Hawking-Strahlung . . . . .	13
3.3	Anwendung der Schwarzkörpertheorie . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Fazit</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>16</b>
5.1	Integralrechnung mit dem Polylogarithmus . . . . .	16
5.2	Berechnung von $Li_4(1)$ . . . . .	17
5.3	Programmcode . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>22</b>

# 1 Bedeutung

Max Planck suchte Ende des 19. Jahrhunderts nach einer Formel, die die Strahlung von Schwarzkörpern beschreibt. Dabei führte er das planck'sche Wirkungsquantum ein, welches eine fundamentale Naturkonstante der Quantenphysik ist. Damit begründete Max Planck die Quantenphysik, die einen bedeutenden Teil der Physik darstellt und noch lange nicht vollständig erforscht ist. [vgl. 4]

Auch Stephen Hawking nutzte die Quantenphysik, um die Hawking-Strahlung von Schwarzen Löchern zu erklären.

In dieser Seminararbeit soll die Schwarzkörperstrahlung nach Max Planck erklärt und analysiert werden. Dabei wird sowohl mathematisch als auch mit einem Programm untersucht, wie mit Hilfe der planck'schen Strahlungsformel die Temperatur und Strahlungsleistung eines Schwarzkörpers berechnet werden kann. Anschließend soll die Möglichkeit der Anwendung der Schwarzkörpertheorie auf Schwarze Löcher evaluiert werden. Hierfür wird zunächst erläutert, wie Schwarze Löcher definiert sind und wie die Hawking-Strahlung funktioniert. Daraufhin wird kurz erörtert, inwieweit sich die Schwarzkörpertheorie auf Schwarze Löcher anwenden lässt.

## 2 Schwarzkörperstrahlung

### 2.1 Definition von Schwarzkörpern

Ein Schwarzkörper ist ein idealisierter Körper, der Strahlung bei jeder Temperatur und auf allen Wellenlängen vollständig absorbiert. Zudem ist ein solcher auf allen Wellenlängen ein perfekter Strahler und strahlt damit in alle Richtungen mit der gleichen Intensität, wobei es eine Wellenlänge gibt, bei welcher die Emission die höchste Radianz hat. Die Strahlung ist dabei nur von der Temperatur des Körpers abhängig.

[vgl. 2, What is thermal - or black body - radiation?]

### 2.2 Schwarzkörperstrahlung - planck'sche Strahlungsformel

Die spezifische Radianz  $B_\lambda(x, \omega, \lambda)$  bezeichnet die Leistung in Watt  $[W]$ , die von einem Oberflächenelement um einen Punkt  $x$  in eine infinitesimale Umgebung der Richtung  $\omega$  bei einer Wellenlänge  $\lambda$  ausgestrahlt wird. Die Einheit der spezifischen Radianz wird im generellen als  $[\frac{W}{m^2 \cdot m \cdot sr}]$  angegeben. Hierbei wird zwischen der Wellenlänge, gegeben in  $[m]$ , und dem Flächenelement, gegeben in  $[m^2]$ , unterschieden. Der Raumwinkel um den Richtungsvektor  $\omega$  wird dabei in Steradian  $[sr]$  angegeben. In der folgenden Betrachtung wird eine Richtung und ein Oberflächenelement als gegeben angenommen. Die spezifische Radianz kann deshalb als  $B_\lambda(\lambda)$  angegeben werden.

[vgl. 14, S.81-81]

Nach Max Planck kann die spezifische Radianz eines Schwarzkörpers als Funktion der Temperatur  $T$  des Körpers beschrieben werden durch:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (1)$$

[vgl. 5, S.16]

Die spezifische Ausstrahlung, welche die Strahlung unabhängig von der Richtung beschreibt, in  $[\frac{W}{m^2 \cdot m}]$  ist gegeben als:

$$E_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (2)$$

[vgl. 5, S.11, 16]

Mit den Konstanten:

c: Lichtgeschwindigkeit

$k_B$ : Boltzmann-Konstante

h: planck'sches Wirkungsquantum

und den Variablen:

T: Temperatur des Körpers

$\lambda$ : Wellenlänge der Strahlung

Die Strahlungsintensität bei gegebener Wellenlänge ist also von der Temperatur des Schwarzkörpers abhängig. Ein Körper mit höherer Temperatur emittiert mit einer höheren Intensität und das Emissionsmaximum wird einer kürzeren Wellenlänge zugeordnet als bei einem Körper mit geringerer Temperatur. (Abbildung 1)

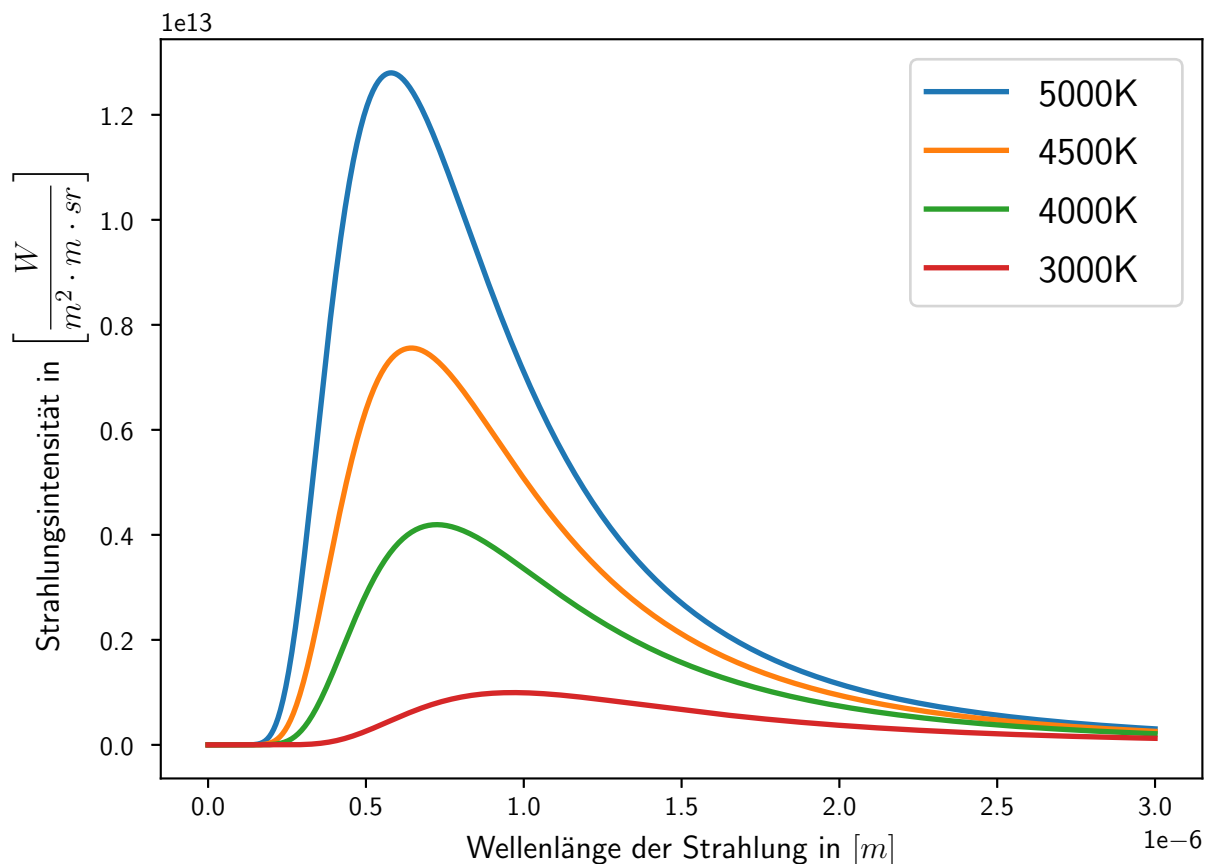


Abbildung 1: Graphen der spezifischen Radianz nach Planck für verschiedene Temperaturen (vgl. Punkt 1).

## 2.3 Berechnung der Temperatur eines Schwarzkörpers

Mit Hilfe moderner Spektrometer können akkurate digitale Messdaten der Strahlungsin-  
tensität von einem Körper erlangt werden ([1], [12]). Die Temperatur des Körpers kann  
durch diese Messdaten geschätzt werden. Dies ist möglich, da jeder Temperatur ein indivi-  
duelles Spektrum zugeordnet werden kann (Abbildung 1). Die Problematik besteht dabei  
darin, dass solche Messdaten meist mit Rauschen überlagert sind.

Im folgenden werden zwei Ansätze zum Schätzen der Temperatur beschrieben sowie deren  
Zuverlässigkeit untersucht.

### 2.3.1 Berechnung der Temperatur mit Hilfe des Maximums

Das Maximum des Graphen kann mit Hilfe der Ableitung der planck'schen Strahlungsformel für die spezifische Radianz (Gleichung 1) und der Wellenlänge  $\lambda_{peak}$  des Maximums bestimmt werden.

Um Gleichung 1 abzuleiten, substituiert man:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T} = x, \text{ mit } x > 0 \quad (3)$$

Daraus ergibt sich:

$$B_x(x, T) = \frac{2 \cdot k_B^5 \cdot T^5}{h^4 \cdot c^2} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}$$

Definiert man nun die Funktion  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$$

So ist  $B_x(x, T)$  proportional zu  $f(x)$ .

Und damit gilt:

$$\frac{d}{dx} B_x(x, T) = k \cdot \frac{d}{dx} f(x), \text{ mit } k = \frac{2 \cdot k_B^5 \cdot T^5}{h^4 \cdot c^2}$$

$f(x)$  kann nun nach  $x$  abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dx} \frac{x^5}{e^x - 1} = \frac{(e^x - 1) \cdot 5x^4 - x^5 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Um das Maximum zu finden, setzt man nun die Ableitung gleich 0. Hierbei genügt es, den Zähler gleich 0 zu setzen:

$$\begin{aligned}
 (e^x - 1) \cdot 5x^4 - x^5 \cdot e^x &= 0 \\
 x^4(5(e^x - 1) - xe^x) &= 0 \\
 5(e^x - 1) - xe^x &= 0 \\
 xe^x &= 5(e^x - 1) \\
 x &= \frac{5e^x - 5}{e^x} \\
 x &= 5 - \frac{5}{e^x} \\
 x &= 5 - 5e^{-x} \\
 e^{-x} &= -\frac{1}{5} \cdot (x - 5)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit der Lambert-W-Funktion gelöst werden:

$$x = 5 + W_0(-5e^{-5}) \quad (4)$$

[vgl. 13, S.2]

Hierfür erhält man den Wert:

$$x = 4,965114231744... \quad (5)$$

(vgl. Punkt 4)

Mit Hilfe von diesem x-Wert kann nun die gesuchte Temperatur des Maximums berechnet werden, indem man x in die nach T aufgelöste Gleichung 3 einsetzt:

$$T = \frac{h \cdot c}{\lambda_{peak} \cdot k_B \cdot x} \quad (6)$$

### 2.3.2 Anwendung auf eine Simulation

Hat man also eine Messung der Strahlung eines Schwarzkörpers, lässt sich von diesem die Temperatur berechnen.

Die Abbildung 2 stellt eine Simulation solcher Messwerte für einen Körper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  in einem  $\lambda$ - $B_\lambda$ -Diagramm dar. Hierfür wurden auf die Funktion  $B_\lambda(\lambda, 5000\text{K})$  Werte addiert, die mit Hilfe einer Standardnormalverteilung mit  $\sigma = 1 \cdot 10^{12}$

und  $\mu = 0$  generiert wurden.

(vgl. Punkt 2)

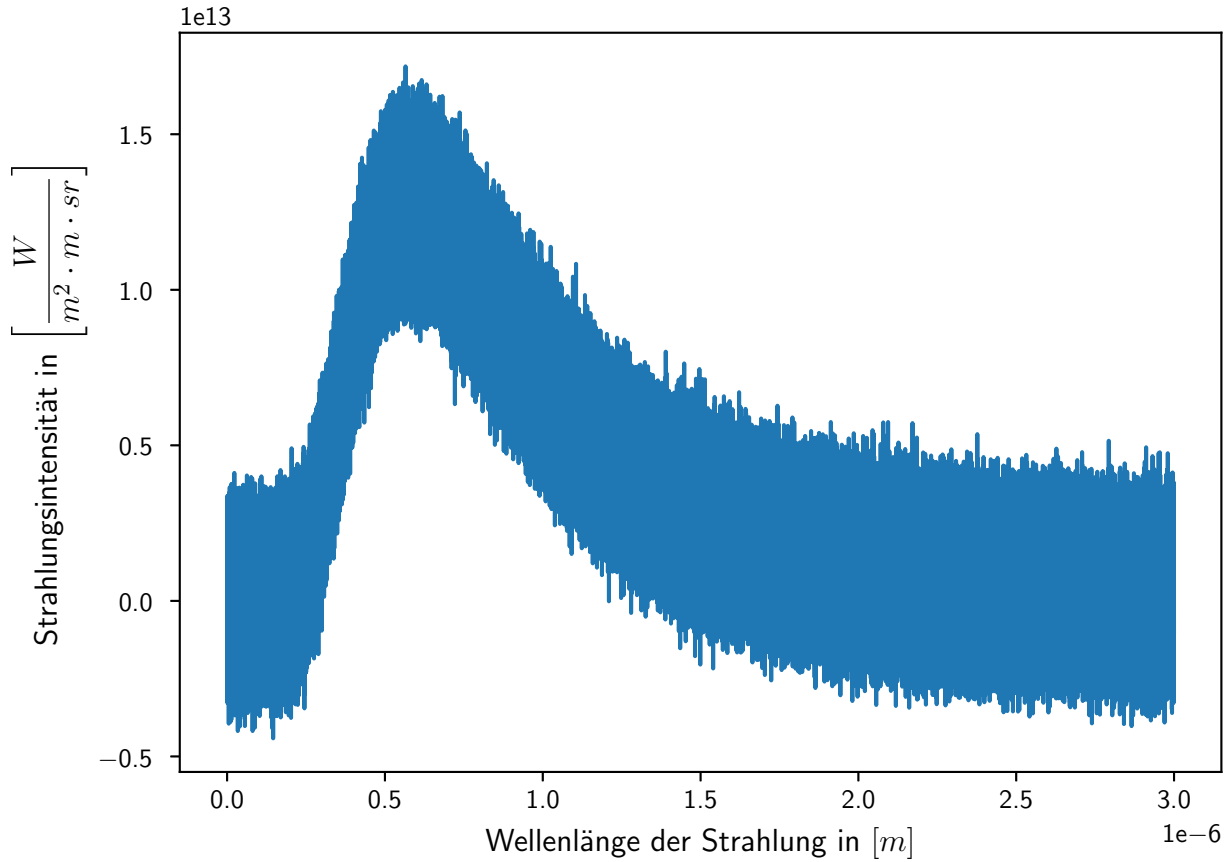


Abbildung 2: Simulation einer Messung  $\lambda$ -I-Diagramm (vgl. Punkt 2).

$\lambda_{peak}$  kann man sich mit Hilfe des Programms ausgeben lassen. Für die simulierte Messung in Abbildung 2 erhält man den Wert:

$$\hat{\lambda}_{peak} \approx 5,652... \cdot 10^{-7} m \quad (7)$$

(vgl. Punkt 3)

Mit Hilfe von diesem Wert und der Gleichung 6 kann nun die Temperatur berechnet werden:

$$\hat{T} = \frac{h \cdot c}{\hat{\lambda}_{peak} \cdot k_B \cdot x} \approx 5126 K \quad (8)$$

(vgl. Punkt 5)



Allerdings ist dieser Wert nicht sehr exakt, denn es liegt eine Abweichung von  $\approx 2,5\%$  von der eigentlichen Temperatur  $T = 5000K$  vor. Diese Ungenauigkeit kann damit erklärt werden, dass die Messwerte aus Abbildung 2 nicht genau die Funktion  $B_\lambda$  abbilden. Daher entspricht das  $\hat{\lambda}_{peak}$  aus Gleichung 7 nicht exakt dem  $\lambda_{peak}$  der eigentlichen Kurve für  $T = 5000K$ .

### 2.3.3 Bestimmung der Temperatur mit der Curve-Fit Funktion

Aufgrund der in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Ungenauigkeit ist es sinnvoll eine Methode zur Berechnung der Temperatur zu nutzen, welche exakter ist. Hierfür kann mit dem Programm die Funktion Curve-Fit verwendet werden.

Diese Funktion findet den Wert für die Temperatur mit dem dazugehörigen Graphen, der am besten auf den Graphen der Messwerte passt. Hierfür wird die Temperatur solange verändert, bis  $S$ , also die Summe der Quadrate aus den Differenzen der gemessenen  $y$ -Werten und den  $y$ -Werten des Graphen mit entsprechender Temperatur, annähernd gegen 0 geht:

$$\sum_i (y_i - B(x_i, T_0))^2 = S$$

Für diese Umsetzung benötigt die Funktion einen Schätzwert für die Temperatur, um diesen immer weiter an die tatsächliche Temperatur anzunähern. Allerdings darf dieser Schätzwert nicht zu klein sein, da sonst die Funktion nicht mehr gegen den gesuchten Graphen konvergiert.

[vgl. 10]

Verwendet man also die Curve-Fit Funktion (mit dem Schätzwert 1000K), um die Temperatur für die Simulation in Abbildung 2 zu bestimmen, so erhält man:

$$T = 5000,007...K \approx 5000K$$

(vgl. Punkt 6)

Der auf diese Weise bestimmte Wert für die Temperatur ist mit einer Abweichung von  $\approx 0,00016\%$  wesentlich exakter als der in Abschnitt 2.3.2 bestimmte Wert.

## 2.4 Berechnung der Strahlungsleistung eines Schwarzkörpers

Die Strahlungsleistung  $P$  in  $[\frac{W}{m^2}]$  eines schwarzen Körpers ist die gesamte Strahlung, die er über alle Wellenlängen aussendet. Entsprechend kann diese als Fläche unter dem Graphen der planck'schen Strahlungsformel für die spezifische Ausstrahlung (Gleichung 2) gesehen werden und mit Hilfe des Integrals berechnet werden:

$$P = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda \quad (9)$$

### 2.4.1 Berechnung der Strahlungsleistung mit Hilfe des Integrals

Im folgenden wird das Integral von Gleichung 9 bestimmt, um somit die Strahlungsleistung zu berechnen.

$$\int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda$$

Um dieses Integral berechnen zu können, definiert man zuerst ein  $x$  mit:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= \frac{hc}{k_B T} \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x > 0 \\ \Rightarrow \lambda(x) &= \frac{hc}{k_B T} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Nach der Substitutionsregel der Integralrechnung gilt:

$$\int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \int_{x(0)}^{x(\infty)} E_{\lambda}(\lambda(x)) \frac{d\lambda}{dx} dx$$

Dabei gilt für  $E_{\lambda}(\lambda(x))$ :

$$E_{\lambda}(\lambda(x)) = 2\pi hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}$$

Für  $\frac{d\lambda}{dx}$  gilt:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{hc}{k_B T} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 & \int_{x(0)}^{x(\infty)} E_\lambda(\lambda(x)) \frac{d\lambda}{dx} dx \\
 &= \int_{\infty}^0 2hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \cdot \frac{d\lambda}{dx} dx \\
 &= \int_{\infty}^0 2hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \cdot \frac{hc}{k_B T} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\
 &= - \int_0^{\infty} 2hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{hc}{k_B T} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\
 &= 2hc^2 \cdot \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \cdot \frac{hc}{k_B T} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} \cdot \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \frac{2k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx
 \end{aligned}$$

Um das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}$  zu berechnen, nutzt man nun die partielle Integration:

$$\int_0^{\infty} u \cdot v' = [u \cdot v]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' \cdot v$$

Hierfür legen wir für  $u = x^3$  und für  $v' = \frac{1}{e^x - 1}$  fest.

Für  $u'$  gilt:

$$u' = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

Für  $v$  gilt:

$$\begin{aligned}
 v &= \int v' dx = \int \frac{1}{e^x - 1} dx \\
 &= \int \frac{1 - e^x + e^x}{e^x - 1} dx \\
 &= - \int \left( \frac{e^x - 1}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) dx \\
 &= \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx - \int 1 dx \\
 &= \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx - (x + c)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Das Integral  $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$  kann wieder mit Hilfe von Substitution gelöst werden.

Mit  $u = e^x - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \rightarrow du = e^x dx$  gilt:

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + c' = \ln(|e^x - 1|) + c'$$

Da  $x$  immer größer 0 ist (vgl. Gleichung 10), ist auch  $e^x - 1$  größer 0. Damit kann der Betrag weggelassen werden:

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \ln(e^x - 1) + c'$$

Das kann wie folgt umgeformt werden:

$$\ln(e^x - 1) + c' = \ln((1 - e^{-x}) \cdot e^x) + c' = \ln(1 - e^{-x}) + \ln(e^x) + c' = \ln(1 - e^{-x}) + x + c'$$

Damit gilt:

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \ln(1 - e^{-x}) + x + c'$$

Dies kann in Gleichung 11 eingesetzt werden, wodurch für  $v$  gilt:

$$v = \ln(1 - e^{-x}) + x + c' - (x + c) = \ln(1 - e^{-x}), \text{ mit } c = 0 \text{ und } c' = 0$$

Damit lässt sich nun partiell integrieren:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 3x^2 \cdot \ln(1 - e^{-x}) dx$$

Das Integral, welches nach der partiellen Integration noch besteht, kann wieder partiell integriert werden. Hierfür müssen die Polylogarithmus-Funktionen verwendet werden: (vgl. Abschnitt 5.1)

$$\int_0^\infty 3x^2 \cdot \ln(1 - e^{-x}) dx = [3x^2 \cdot Li_2(e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 6x \cdot Li_2(e^{-x}) dx$$

Daraus folgt:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 6x \cdot Li_2(e^{-x}) dx$$

Diesen Schritt, das Integral, das nach der partiellen Integration noch besteht, wieder partiell zu integrieren, führt man noch zwei mal durch, sodass kein Integral mehr vorhanden ist:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 6x \cdot Li_2(e^{-x}) dx \\ &= [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 6 \cdot Li_3(e^{-x}) dx \\ &= [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x}) - 6 \cdot Li_4(e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty 0 \cdot Li_4(e^{-x}) dx \\ &= [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x}) - 6 \cdot Li_4(e^{-x})]_0^\infty \end{aligned}$$

Damit gilt für das Integral  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx$ :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx &= [x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x}) - 6 \cdot Li_4(e^{-x})]_0^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x}) - 6 \cdot Li_4(e^{-x})) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln(1 - e^{-x}) - 3x^2 \cdot Li_2(e^{-x}) + 6x \cdot Li_3(e^{-x}) - 6 \cdot Li_4(e^{-x})) \\ &= 6 \cdot Li_4(1) \end{aligned} \tag{12}$$

Für  $Li_4(1)$  erhält man den Wert:

$$Li_4(1) = \frac{\pi^4}{90} \tag{13}$$

(vgl. Abschnitt 5.2)

Damit gilt für das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

[vgl. 5, S.18]

Für die Strahlungsleistung  $P$  erhalten wir damit abschließend:

$$P = \int_0^\infty E_\lambda(\lambda) d\lambda = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot \frac{\pi^4}{15} \tag{14}$$

Hierbei werden die Konstanten zur sogenannten Stefan-Boltzmann-Konstante zusammengefügt. Diese ist definiert zu:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$$

[vgl. 5, S.19]

Aus Gleichung 14 folgt damit das berühmte Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P = \sigma \cdot T^4 \tag{15}$$

[vgl. 5, S.19]

---

<sup>1</sup>An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass die Gleichung 12 der Seite WolframAlpha (vgl. <https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=Integrate%5BDivide%5BPower%5Bx%2C3%5D%2CPower%5Be%2Cx%5D-1%5D%2Cx%5D>) widerspricht. Die Ergebnisse unterscheiden sich darin, dass in dieser Arbeit  $+6x \cdot Li_3(e^{-x})$  gerechnet wird, während WolframAlpha mit  $-6x \cdot Li_3(e^{-x})$  rechnet. Dieser Unterschied in der Stammfunktion der Funktion  $\frac{x^3}{e^x-1}$  ändert allerdings nichts am Ergebnis  $6 \cdot Li_4(1)$ , da  $6x \cdot Li_3(e^{-x})$  gegen 0 geht und damit keinen Einfluss auf das Endergebnis hat. Auf ein Nachfragen bezüglich dieses Unterschieds wurde nicht geantwortet.

Hat man also die Temperatur eines Schwarzkörpers gegeben, kann man sich mit Hilfe dieser und der Gleichung 15 die Strahlungsleistung berechnen. Für einen Körper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  ergibt sich damit:

$$P = \sigma \cdot (5000\text{K})^4 = 35439840,119\dots \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 35,44 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (16)$$

(vgl. Punkt 7)

## 2.4.2 Numerische Verifizierung durch Riemannsches Integral

Im Folgenden wird die Korrektheit des in Abschnitt 2.4.1 berechneten Werts für die Strahlungsleistung für einen Körper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  (vgl. Gleichung 16) numerisch gezeigt. Für die Berechnung des Riemannsches Integrals mit Hilfe des Programms wird die Definition des Integrals verwendet. Da das Integral eine Annäherung für die Fläche unter dem Graphen ist, erhält man diese für eine Funktion  $f(x)$ , indem man die Fläche in eine unendlich große Anzahl von Rechtecken unterteilt. Die Breite dieser Rechtecke ist  $h = x_s - x_{s-1}$  und die Höhe beträgt  $f(x_{s-1})$ . Daher gilt für die Fläche der einzelnen Rechtecke:

$$A_0 = f(x_{s-1}) \cdot h$$

Lässt man nun die Anzahl der Rechtecke gegen  $\infty$  gehen, geht die Breite  $h$  gegen 0. Summiert man dann die Fläche aller Rechtecke auf, so nähert man sich immer weiter der Fläche unter dem Graphen an. Dann gilt mit  $x = n \cdot h$ :

$$P = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^h f\left(\frac{n}{h}\right) \cdot \frac{1}{h}$$

Setzt man dies im Programm um, erhält man für die Strahlungsleistung für einen Schwarzkörper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  den Wert:

$$35439838,941\dots \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 35,44 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

(vgl. Punkt 8)

Dieser Wert ist nur um  $\approx 3,3 \cdot 10^{-8}\%$  geringer als der in Abschnitt 2.4.1 berechnete Wert, womit sich dieser bestätigt.

## 3 Schwarze Löcher

### 3.1 Definition Schwarze Löcher

Ein Schwarzes Loch ist eine Region der Raumzeit, aus der auf Grund der hohen Gravitation, die von dem Schwarzen Loch ausgeht, kein Entkommen möglich ist, da die Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Ein Schwarzes Loch wird durch den Ereignishorizont begrenzt, der den Weg des Lichts, welches der Gravitation des Schwarzen Loches gerade so nicht entkommen kann, beschreibt.

[vgl. 6, S.115]

### 3.2 Hawking-Strahlung

Stephen Hawking zeigte, dass jedem Schwarzen Loch eine bestimmte Temperatur zugewiesen werden kann. Da jeder Körper mit einer endlichen Temperatur ein bestimmtes Maß an Strahlung emittiert, müssen folglich auch Schwarze Löcher Strahlung emittieren.

Diese sogenannte Hawking-Strahlung kann mit Hilfe des Konzepts der virtuellen Teilchen erklärt werden.

Auf Grund der Unschärferelation der Quantenphysik muss es im Vakuum Quantenfluktuationen geben, welche als Teilchenpaare betrachtet werden können. Diese bestehen aus je einem Teilchen und einem Antiteilchen, welche sehr kurzlebig sind, da sie sich ständig gegenseitig annihilieren, dass heißt sich auslöschen. Diese Teilchen sind sogenannte virtuelle Teilchen. Sie können nicht direkt mit Hilfe eines Teilchendetektors beobachtet werden, sondern nur durch ihre indirekten Auswirkungen nachgewiesen werden. Solche virtuellen Teilchen entstehen auch am Rand von Schwarzen Löchern, direkt außerhalb des Ereignishorizonts. Fällt ein Teilchen oder Antiteilchen eines virtuellen Teilchenpaares in das Schwarze Loch, wird dieses von seinem Partner durch den Ereignishorizont getrennt, sodass sie sich nicht mehr gegenseitig annihilieren können. Der Partner, der nicht in das Schwarze Loch gefallen ist, kann nun entweder auch in das Schwarze Loch fallen oder als reales Teilchen oder Antiteilchen die Nähe des Schwarzen Loches verlassen. Diese sich entfernenden Teilchen nimmt ein Beobachter als vom Schwarzen Loch emittierte Teilchen wahr und werden als Hawking-Strahlung bezeichnet.

Als Folge des Energieerhaltungssatzes verringert sich die Masse des Schwarzen Loches und damit seine Ausdehnung. Zudem steigt mit geringer werdender Masse des Schwarzen Loches dessen Temperatur und Emissionsrate.

[vgl. 6, S.139-144] [vgl. 7, S.4]

### 3.3 Anwendung der Schwarzkörpertheorie

Im folgenden soll evaluiert werden, inwieweit sich die Schwarzkörpertheorie auf Schwarze Löcher anwenden lässt.

Schwarzkörper sind ein idealisiertes physikalisches Modell. Daher existieren solche in der Natur nicht. Schwarze Löcher können dennoch als fast perfekte Schwarzkörper approximiert werden, da sie auf allen Wellenlängen Strahlung absorbieren, keine Strahlung reflektieren und eine Strahlung, die Hawking-Strahlung, emittieren, wobei sie das gleiche Emissionsspektrum wie ein heißer Körper besitzen.

Dennoch ist die Anwendung der Schwarzkörperstrahlung nicht möglich, da die Hawking-Strahlung noch nicht gemessen werden konnte. Dies erklärt sich damit, dass große Schwarze Löcher zum einen eine sehr geringe Strahlungsintensität haben und zum anderen sehr weit weg sind und kleine Schwarze Löcher, die eine messbare Strahlungsintensität hätten, noch nicht entdeckt worden sind.

Trotz der Tatsache, dass sich die Schwarzkörpertheorie in der Praxis nicht auf Schwarze Löcher anwenden lässt, hat Hawking eine Möglichkeit gefunden, die Temperatur und die Lebensdauer von Schwarzen Löchern zu berechnen. Seine Berechnungen basieren darauf, dass es möglich ist, die Masse von Schwarzen Löchern zu berechnen und ausgehend von dieser auf die Temperatur und die Lebensdauer zu schließen. So hat er berechnet, dass die Lebensdauer eines Schwarzen Loches mit einer Anfangsmasse von  $1 \cdot 10^{12} kg$  circa dem Alter des Universums entspricht.

Die Schwarzkörpertheorie findet also ihre Anwendung zwar nicht im Bereich der Schwarzen Löcher. Dennoch kann sie aber zum Beispiel, um nur eine ihrer Anwendungsmöglichkeiten zu nennen, auf die Sonne, welche als Stern einen fast perfekten Schwarzkörper approximiert, angewandt werden.

[vgl. 6, S.140, 144–148] [vgl. 3]



## 4 Fazit

In dieser Seminararbeit haben wir uns mit der Theorie der Schwarzkörper beschäftigt und sind auf die Berechnung von deren Temperatur und Strahlungsleistung eingegangen. Zudem wurde die Hawking-Strahlung beschrieben sowie die Möglichkeit der Anwendung der Schwarzkörpertheorie auf Schwarze Löcher betrachtet.

Max Planck hat eine Möglichkeit geschaffen die Strahlung eines Körpers mit einer bestimmten Temperatur mit der planck'schen Strahlungsformel genau abzubilden.

Auch wenn die Technik noch nicht weit genug entwickelt ist, um die Hawking-Strahlung zu messen und somit die Schwarzkörpertheorie auf Schwarze Löcher anzuwenden, hat die Theorie der Schwarzkörperstrahlung dennoch eine bedeutende Rolle in der Physik und der Technik. Unter anderem, da es Planck mit der Entdeckung des planck'schen Wirkungsquantums gelungen ist, den Grundstein für die Quantenphysik zu legen.

## 5 Anhang

### 5.1 Integralrechnung mit dem Polylogarithmus

Der Polylogarithmus ist allgemein definiert als:

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (17)$$

[vgl. 15, S.2]

Es gilt:

$$Li_1(z) = -\ln(1 - z)$$

[vgl. 15, S.3]

und

$$Li_{n+1}(z) = \int_0^z \frac{Li_n(t)}{t} dt \quad (18)$$

[vgl. 15, S.3]

Damit kann man das Integral  $\int Li_n(e^{-x})dx$  berechnen:

Zunächst substituiert man mit  $e^{-x} = u$ . Damit gilt:

$$\int Li_n(e^{-x})dx = \int Li_n(u) \frac{dx}{du} du$$

$\frac{dx}{du}$  wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} u &= e^{-x} \\ \longrightarrow x &= -\ln(u) \\ \longrightarrow \frac{dx}{du} &= \frac{d}{du} -\ln(u) = -\frac{1}{u} \end{aligned} \quad (19)$$

Mit Gleichung 18 und Gleichung 19 gilt entsprechend allgemein:

$$\int Li_n(e^{-x})dx = \int Li_n(u) \frac{dx}{du} du = - \int Li_n(u) \frac{1}{u} du = -Li_{n+1}(u) = -Li_{n+1}(e^{-x})$$

Damit lassen sich nun die für Abschnitt 2.4.1 benötigten Stammfunktionen finden:

$$\begin{aligned} \int \ln(1 - e^{-x})dx &= \int -Li_1(e^{-x})dx = - \int Li_1(e^{-x})dx = -(-Li_2(e^{-x})) = Li_2(e^{-x}) \\ \int Li_2(e^{-x})dx &= -Li_3(e^{-x}) \\ \int -Li_3(e^{-x})dx &= - \int Li_3(e^{-x})dx = -(-Li_4(e^{-x})) = Li_4(e^{-x}) \end{aligned}$$

## 5.2 Berechnung von $Li_4(1)$

Im folgenden wird gezeigt, wie man den Wert für  $Li_4(1)$  erhält.

Mit der Definition des Polylogarithmus (Gleichung 17) und  $z = 1$  gilt:

$$Li_n(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

Dies entspricht der Definition der Riemann-Zeta-Funktion:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

[vgl. 8, S.2]

Daraus folgt:

$$Li_n(1) = \zeta(n)$$

[vgl. 15, S.3]

Für  $n = 4$  gilt entsprechend:

$$Li_4(1) = \zeta(4)$$

Dafür ergibt sich der Wert:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

[vgl. 8, S.15]

## 5.3 Programmcode

1. Definition der planck'schen Strahlungsformel sowie Ausgabe von Graphen der Funktion für verschiedene Temperaturen  
im Programm gilt:  $x = \lambda$   
T: Temperatur  
h: Planck'sches Wirkungsquantum  
c: Lichtgeschwindigkeit  
k: Boltzmann-Konstante

```

x = np.linspace(3e-6/3e6, 3e-6, int(3e6))
plt.xlabel(r"Wellenlänge der Strahlung in  $\left[ m \right]$ ", fontsize=13)
plt.ylabel(r"Strahlungsintensität in  $\left[ \frac{W}{m^2 \cdot m \cdot sr} \right]$ ", fontsize=13)

def B(x, T):
    return 2 * h * c**2 / x**5 * 1 / (np.exp(h * c / (x * k * T)) - 1)

y = B(x, 5000)
plt.plot(x, y, label = "5000K", linewidth = 2)
x[1]

y2 = B(x, 4500)
plt.plot(x, y2, label = "4500K", linewidth = 2)
x[4]

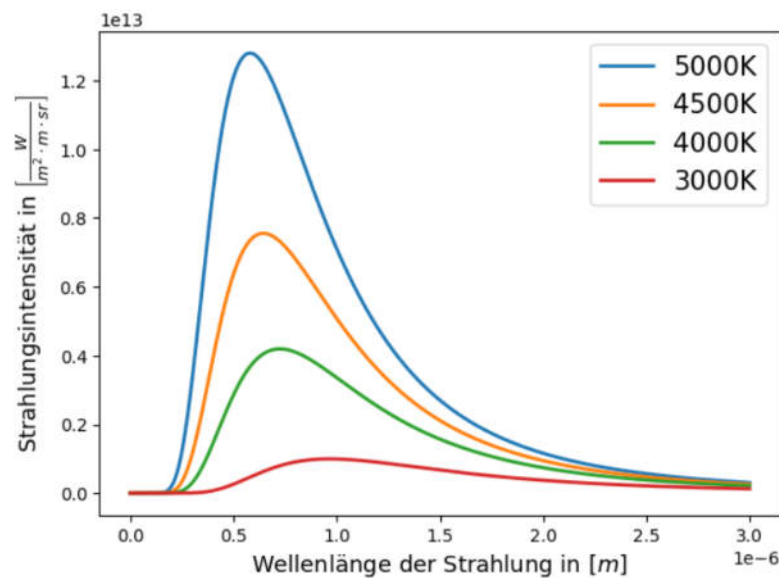
y3 = B(x, 4000)
plt.plot(x, y3, label = "4000K", linewidth = 2)
x[3]

y4 = B(x, 3000)
plt.plot(x, y4, label = "3000K", linewidth = 2)
x[2]

plt.legend(loc = "best", fontsize=15)

```

✓ 9.8s  
/tmp/ipykernel\_111475/2776757386.py:8: RuntimeWarning: overflow encountered in exp  
return 2 \* h \* c\*\*2 / x\*\*5 \* 1 / (np.exp(h \* c / (x \* k \* T)) - 1)



## 2. Simulation einer Messung

Über die Funktion  $B(x, 5000)$  wird ein Rauschen gelegt, wodurch eine Simulation einer Messung für einen Körper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  entsteht. Hierfür werden auf die Funktion Werte addiert, die mit Hilfe einer Standardnormalverteilung mit  $\sigma = 1e12$  und  $\mu = 0$  generiert werden.

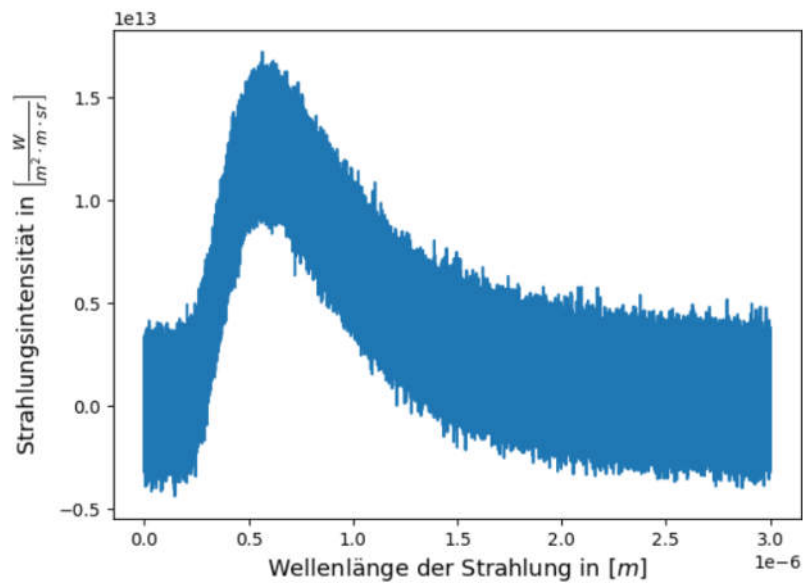
[vgl. 9]

```

y += np.random.normal(0, 1e12, len(x))
plt.plot(x, y)
plt.xlabel(r"Wellenlänge der Strahlung in $\left[ m \cdot \text{right} \right]$", fontsize=13)
plt.ylabel(r"Strahlungsintensität in $\left[ \frac{W}{m^2 \cdot m \cdot \text{sr}} \right] \cdot \text{right} \right]$", fontsize=13)

```

✓ 0.8s



### 3. Ausgabe von $\lambda_{peak}$

Es wird für die Simulation in Punkt 2  $\lambda_{peak}$  ausgegeben.

Im Programm gilt:  $\lambda_{peak} = x0$

```

m = np.argmax(y)
x0 = x[m]
x0

```

✓ 0.0s

5.652820000000002e-07

### 4. Berechnung des Wertes für x mit der Lambert-W-Funktion (Gleichung 4)

In diesem Abschnitt wird ein Wert für  $x = 5 + W_0(-5e^{-5})$  gefunden.

Im Programm gilt:  $x = x1$

[vgl. 11]

```

a = -5
b = -5
d = -1

x1 = -a - lambertw(-b * d * np.exp(a * d)) / -d

x1

```

✓ 0.0s

(4.965114231744276+0j)

## 5. Berechnung der Temperatur für die Simulation (Gleichung 6)

```

T = h * c / (4.965114231744276 * k * x0)

T

```

✓ 0.0s

5126.241336510223

## 6. Temperaturberechnung mit der Curve-Fit Funktion

Mit Hilfe der Curve-Fit Funktion wird ein genauerer Temperaturwert für die Simulation berechnet. Die Funktionsweise der Curve-Fit Funktion wird in Abschnitt 2.3.3 erklärt.

[vgl. 10]

```

opt = curve_fit(B, x, y, [1000])[0][0]
opt

```

✓ 1.5s

[/tmp/ipykernel\\_111475/2776757386.py:8](#): RuntimeWarning: overflow encountered in exp  
return 2 \* h \* c\*\*2 / x\*\*5 \* 1 / (np.exp(h \* c / (x \* k \* T)) - 1)

5000.007814319501

## 7. Wertberechnung für die Strahlungsleistung mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (Gleichung 16)

Zunächst wird das Stefan-Boltzmann-Gesetz als  $P(t)$  definiert. Es wird die Strahlungsleistung für einen Körper mit der Temperatur  $T = 5000\text{K}$  berechnet.

```

def P(t):
    return 2 * k**4 * pi**5 / (15 * h**3 * c**2) * t**4

P(5000)

```

✓ 0.0s

35439840.11990269

## 8. Berechnung des Integrals

Zunächst wir die planck'sche Strahlungsformel für die spezifische Ausstrahlung (Gleichung 2) als  $E(x,T)$  definiert.

Im Programm gilt:  $x = \lambda$

Es wird mit der Definition des Integrals als Fläche unter dem Graphen das Integral  $I$  annäherungsweise für einen Körper mit  $T = 5000\text{K}$  berechnet, um die Strahlungsleistung des Körpers zu berechnen.

```

def E(x,T):
    return 2 * pi * h * c**2 / x**5 * 1 / (np.exp(h * c / (x * k * T)) - 1)

def f(x):
    return E(x,5000)

a = 1e-10
b = 1
n = int(3e7)

x = np.linspace(a,b,n)

I = np.sum(f(x)) * (b-a)/n

I

```

✓ 4.5s

[/tmp/ipykernel\\_111475/1576912645.py:2](#): RuntimeWarning: overflow encountered in exp  
return 2 \* pi \* h \* c\*\*2 / x\*\*5 \* 1 / (np.exp(h \* c / (x \* k \* T)) - 1)

35439838.94139292

## 6 Literaturverzeichnis

### Quellen

- [1] *Aryelle400 - Spektrometer*. Online, accessed 10.10.2023. 2014. URL: <http://www.ltb-berlin.de/assets/uploads/aryelle400-datenblatt.pdf>.
- [2] *Balckbody Radiation*. Online, accessed 17.08.2023. ESA, 2019. URL: <https://sci.esa.int/web/education/-/48986-blackbody-radiation>.
- [3] *Effektivtemperatur*. Online, accessed 24.10.2023. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/effektivtemperatur/3654>.
- [4] „*Energie in Paketen*“ - *Was entdeckte Max Planck*. Online, accessed 03.10.2023. Max-Planck-Gesellschaft. URL: <https://www.mpg.de/19247229/was-entdeckte-max-planck>.
- [5] R.G. Grainger. *Radiometric Basics*. Online, accessed 04.09.2023. URL: <http://eodg.atm.ox.ac.uk/user/grainger/research/book/protected/Chapter3.pdf>.
- [7] Stephen Hawking. *Particle Creation by Black Holes*. Online, accessed 18.08.2023. Cambridge, England: Springer-Verlag, 1975. URL: <https://www.brainmaster.com/software/pubs/physics/Hawking%20Particle%20Creation.pdf>.
- [8] Armand Nabavi. *Die Riemannsche Zetafunktion*. Online, accessed 16.09.2023. 2012. URL: [https://www.asc.tuwien.ac.at/~herfort/BAKK/Nabavi\\_Riemann\\_Zeta\\_Funktion.pdf](https://www.asc.tuwien.ac.at/~herfort/BAKK/Nabavi_Riemann_Zeta_Funktion.pdf).
- [9] *numpy.random.normal*. Online, accessed 10.10.2023. URL: <https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.normal.html>.
- [10] *scipy.optimize.curve\_fit*. Online, accessed 29.08.2023. URL: [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\\_fit.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html).
- [11] *scipy.special.lambertw*. Online, accessed 27.09.2023. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.special.lambertw.html>.



- [12] *Spectrometer Mavospec Base*. Online, accessed 10.10.2023. URL: [https://www.atp-messtechnik.de/media/pdf/62/a6/60/MAVOSPECBASE\\_MAVOSPECBASE\\_D\\_Datenblatt.pdf](https://www.atp-messtechnik.de/media/pdf/62/a6/60/MAVOSPECBASE_MAVOSPECBASE_D_Datenblatt.pdf).
- [13] Tony Scott u.a. *Asymptotic series of Generalized Lambert W Function*. Online, accessed 02.09.2023. Association for Computing Machinery, 2013. URL: [https://www.researchgate.net/profile/Tony-Scott-2/publication/262399928\\_Asymptotic\\_series\\_of\\_Generalized\\_Lambert\\_W\\_function/links/55aefbe808aee0799220ed4\\_Asymptotic-series-of-Generalized-Lambert-W-function.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Tony-Scott-2/publication/262399928_Asymptotic_series_of_Generalized_Lambert_W_function/links/55aefbe808aee0799220ed4_Asymptotic-series-of-Generalized-Lambert-W-function.pdf).
- [14] Eric Veach. *Robust Monte Carlo methods for light transport simulation*. Online, accessed 24.10.2023. 1997. URL: [https://graphics.stanford.edu/papers/veach\\_thesis/thesis.pdf](https://graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/thesis.pdf).
- [15] Christian Vergu. *Polylogarithms and physical applications*. Online, accessed 16.09.2023. 2013. URL: <https://www.maths.dur.ac.uk/lms/098/talks/0349vergu.pdf>.

## Literatur

- [6] Stephen Hawking. *Eine kurze Geschichte der Zeit*. 13. Auflage. Reibek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2017.

## Erklärung zur Seminararbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche gekennzeichnet habe.

Bruckmühl, den \_\_\_\_\_